IMO-Herbstzirkus 2024: Rekursionen und erzeugende Funktionen
Christian Bernert

1 Lineare Rekursionen

In vielen mathematischen Problemen ist das Ergebnis eine Zahl, die von einem Parameter n abhängt, also eine *Folge* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Oft ist es möglich, einen rekursiven Zusammenhang zwischen den Folgegliedern zu finden. Von Interesse ist aber in vielen Fällen eine *explizite Form*, also eine Formel, die das n-te Folgeglied ausrechnet, ohne alle vorherigen bestimmen zu müssen.
In diesem ersten Abschnitt beschäftigen wir uns mit einer einfachen Methode, die uns ermöglich, aus einer *linearen Rekursion* eine solche explizite Formel zu bestimmen.
Im nächsten Kapitel werden wir dann sehen, dass man die gleichen Probleme auch mit der Methode der erzeugenden Funktionen lösen kann. Diese sehen zwar zunächst komplizierter aus, erlauben uns aber letztlich, auch allgemeinere Rekursionen zu untersuchen und dort ebenfalls in vielen Fällen eine explizite Formel zu bestimmen.

1.1 Homogene lineare Rekursionen

Wir untersuchen zunächst *homogene lineare Rekursionen*. Damit meinen wir eine Rekursion der Art

$$a_{n+d} = c_{d-1}a_{n+d-1} + c_{d-2}a_{n+d-2} + \cdots + c_0 a_n,$$

wobei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ die zu untersuchende Folge ist und die Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_{d-1}$ gegebene Koeffizienten mit $c_0 \neq 0$. Die Zahl d wollen wir die *Länge* der Rekursion nennen, sie bestimmt, von wie vielen der vorherigen Folgegliedern das nächste abhängt.
Damit eine solche Folge eindeutig definiert ist, müssen wir zusätzlich zur *Rekursionsgleichung* auch *Startwerte* bestimmen und zwar genau die d Werte $a_0, \ldots, a_{d-1}$ – dann sind alle weiteren durch die Rekursion daraus eindeutig bestimmt.

Ein prototypisches Beispiel ist die **Fibonaccifolge** $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, die durch die Startwerte $F_0 = 0, F_1 = 1$ und die Rekursion $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n \geq 0$ definiert ist. Dies ist also eine Rekursion der Länge 2 mit den Koeffizienten $c_0 = c_1 = 1$.
Die Fibonaccifolge beginnt mit $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$ und taucht als Lösung in Fragestellungen in vielen verschiedenen Gebieten der Mathematik auf.

Die **Lucas-Folge** $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ erfüllt die gleiche Rekursion $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ wie die Fibonaccizahlen, hat allerdings andere Startwerte $L_0 = 2, L_1 = 1$. Sie setzt sich also durch $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, \ldots$ fort.

Zwei Folgen, die der gleichen Rekursion genügen, können also durchaus sehr unterschiedlich aussehen. Wir werden aber herausfinden, dass sie sich doch in gewissen Aspekten sehr ähnlich verhalten (zumindest deutlich ähnlicher als zwei Folgen mit den gleichen Startwerten, aber unterschiedlichen Rekursionen).

Zur Bestimmung einer expliziten Formel untersuchen wir zunächst den einfachsten Fall, den einer Rekursion der Länge 1:

Eine Rekursion der Länge 1 ist von der Form $a_{n+1} = \lambda a_n$ für einen Koeffizienten λ. Die explizite Form lässt sich dann sofort bestimmen zu $a_n = \lambda^n \cdot a_0$.

Motiviert von diesem Ergebnis und der Beobachtung, dass rekursiv definierte Folgen tendenziell exponentiell wachsen, untersuchen wir, ob eine Folge der Form $a_n = \lambda^n$ auch Lösung einer längeren Rekursion

$$a_{n+d} = c_{d-1}a_{n+d-1} + c_{d-2}a_{n+d-2} + \cdots + c_0 a_n$$

sein kann. Einsetzen zeigt, dass dies zu $\lambda^{n+d} = c_{d-1}\lambda^{n+d-1} + c_{d-2}\lambda^{n+d-2} + \cdots + c_0\lambda^n$ äquivalent ist und damit (wegen $\lambda \neq 0$) zu

$$\lambda^d = c_{d-1}\lambda^{d-1} + c_{d-2}\lambda^{d-2} + \cdots + c_1\lambda + c_0.$$

Entscheidend ist nun, dass diese Gleichung nicht mehr von n abhängt, sondern lediglich von den Koeffizienten der Rekursionsgleichung. Die Folge $a_n = \lambda^n$ erfüllt also tatsächlich die Rekursion, falls λ eine Nullstelle des Polynoms

$$x^d - c_{d-1}x^{d-1} - c_{d-2}x^{d-2} - \cdots - c_1 x - c_0$$

ist. Wir wollen diesen Ausdruck das **charakteristische Polynom** der Rekursion nennen. Wir beachten, dass es nur von der Rekursionsgleichung und nicht von den Startwerten abhängt.

Bei zufälliger Wahl der Startwerte ist es aber sicherlich eher unwahrscheinlich, dass unsere Folge tatsächlich von der Form $a_n = \lambda^n$ für eine Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms ist. An dieser Stelle rettet uns aber die Linearität der Rekursionsgleichung: Damit lösen nämlich auch $a_n = \alpha \cdot \lambda^n$ für beliebige Koeffizienten α und allgemeiner auch Summen

$$a_n = \alpha_1 \cdot \lambda_1^n + \cdots + \alpha_d \cdot \lambda_d^n$$

für beliebige Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ die Rekursionsgleichung, wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind.[1]
Hier sind die Nullstellen durch die Rekursionsgleichung vorgegeben, aber die Koeffizienten α_i dürfen wir frei wählen. Hier haben wir d Freiheitsgrade – genauso viele, wie wir Startwerte vorgegeben haben. Tatsächlich gibt uns jeder der d Startwerte eine lineare Gleichung, die die Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ erfüllen müssen. Wir müssen also lediglich ein lineares Gleichungssystem aus d Gleichungen in d Variablen lösen, um die Koeffizienten zu bestimmen.

Für die Fibonaccifolge (F_n) lautet das charakteristische Polynom $x^2 - x - 1$. Die Nullstellen dieses quadratischen Polynoms sind $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Mit dem Ansatz $F_n = \alpha_1 \cdot \lambda_1^n + \alpha_2 \cdot \lambda_2^n$ erhalten wir aus den Startwerten

$$\begin{aligned} 0 &= F_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= F_1 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2. \end{aligned}$$

Nach der ersten Gleichung ist also $\alpha_2 = -\alpha_1$ und damit wird die zweite Gleichung zu $1 = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2) = \sqrt{5}\alpha_1$, also $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Wir erhalten die **Binet-Formel** für die Fibonaccifolge:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Da $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ gilt, sehen wir, dass F_n ziemlich nah bei $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ ist, wobei $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ der *Goldene Schnitt* ist. Genauer gesagt ist die Differenz immer kleiner als $\frac{1}{2}$ und wird für große n sogar beliebig klein. Damit können wir auch sehen, dass der Quotient $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ immer näher an den Goldenen Schnitt kommt, tatsächlich ist diese Folge von Brüchen $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$ in gewissem Sinne sogar die beste Approximation von φ durch Brüche. Dies ist auch ein Grund, warum Fibonaccizahlen an vielen Stellen in der Natur (z.B. in Sonnenblumen) ganz ohne Menscheneinwirkung auftauchen!

[1] Für Lineare-Algebra-Kenner: Die Menge der Folgen, die eine gegebene Rekursion lösen, bildet also einen Vektorraum! Tatsächlich kann man die meisten der folgenden Argumente etwas eleganter in der Sprache der linearen Algebra formulieren.

Auch wenn wir die explizite Form gewissermaßen über einen Ansatz „geraten" haben, ist dies dennoch ein logisch korrekter Beweis des Ergebnisses: Wir haben uns überlegt, dass jede Folge der Form

$$b_n = \alpha_1 \cdot \lambda_1^n + \cdots + \alpha_d \cdot \lambda_d^n$$

die gleiche Rekursion wie a_n erfüllt. Können wir die Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ so wählen, dass $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{d-1} = b_{d-1}$ gilt, d.h. die beiden Folgen stimmen auf den ersten d Werten überein, so stimmen sie auch automatisch überall überein, denn eine Folge ist durch die Rekursionsgleichung und die Startwerte eindeutig bestimmt!

Die einzige Frage, die bei diesem Vorgehen zunächst offen bleibt, ist, ob es stets möglich ist, geeignete Koeffizienten zu finden. Zumindest, wenn das charakteristische Polynom tatsächlich d verschiedene Nullstellen hat, ist dies tatsächlich immer der Fall:

Satz (Lösungsformel für homogene lineare Rekursionen): Ist eine Rekursion $a_{n+d} = c_{d-1}a_{n+d-1} + \cdots + c_0 a_n$ gegeben, deren charakteristisches Polynom $x^d - c_{d-1}x^{d-1} - \cdots - c_0$ verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ hat, so ist jede Lösung dieser Rekursion (mit beliebigen Startwerten) von der Form unseres Ansatzes:

$$a_n = \alpha_1 \cdot \lambda_1^n + \cdots + \alpha_d \cdot \lambda_d^n$$

Beweis: Mit anderen Worten müssen wir zeigen, dass für beliebige Startwerte $a_0, \ldots, a_{d-1}$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \cdots + \alpha_d &= a_0 \\
\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_d\lambda_d &= a_1 \\
\alpha_1\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_d\lambda_d^2 &= a_2 \\
&\cdots\cdots \\
\alpha_1\lambda_1^{d-1} + \cdots + \alpha_d\lambda_d^{d-1} &= a_{d-1}
\end{aligned}$$

eine Lösung besitzt. Dies ergibt sich leicht mit etwas linearer Algebra. Da wir hier elementar argumentieren wollen, wird der Beweis etwas umständlicher: Das Gleichungssystem ist sicherlich äquivalent dazu, dass für jedes Polynom $P(x) = t_0 + t_1 x + \cdots + t_{d-1}x^{d-1}$ von Grad höchstens $d-1$ gilt:

$$\alpha_1 P(\lambda_1) + \cdots + \alpha_d P(\lambda_d) = t_0 a_0 + t_1 a_1 + \cdots + t_{d-1}a_{d-1}$$

(warum?). Bekanntlich ist ein Polynom von Grad höchstens $d-1$ durch die Werte an d verschiedenen Stellen eindeutig bestimmt. Insbesondere gibt es Polynome $P_i(x)$ von Grad $d-1$ mit $P_i(\lambda_i) = 1$ und $P_i(\lambda_j) = 0$ sonst, nämlich

$$P_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - \lambda_j)}{\prod_{j\neq i} \lambda_i - \lambda_j},$$

und wir können jedes Polynom P von Grad höchstens $d-1$ als Linearkombination $P(x) = \sum_{i=1}^{d} P(\lambda_i)P_i(x)$ dieser Polynome schreiben. Damit genügt es nun wegen der Linearität, die Bedingung für die Polynome $P = P_i$ zu erfüllen. Dann steht links aber einfach α_i und rechts ein Ausdruck, der von den Koeffizienten von P_i abhängt, wir können α_i also einfach genau so wählen. $\square$

In der Praxis wird man diesen Satz natürlich meist nicht zitieren, weil man ja ohnehin die Koeffizienten ausrechnen muss. Dies wird man wiederum auch eher durch konkretes Lösen des

Gleichungssystems und nicht abstrakt wie im vorigen Beweis tun. Es ist aber gut zu wissen, dass dies immer funktionieren wird.

Die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ dürfen übrigens durchaus auch komplexe Zahlen sein, auch wenn die ursprüngliche Folge nur aus reellen Zahlen besteht, wie das folgende Beispiel zeigt:

Die Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ definiert durch die Startwerte $a_0 = 1, a_1 = 2$ sowie die Rekursion $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 5a_n$ hat das charakteristische Polynom $x^2 - 4x + 5$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = 2 + i$ und $\lambda_2 = 2 - i$. Mit dem Ansatz $a_n = \alpha_1 \cdot \lambda_1^n + \alpha_2 \cdot \lambda_2^n$ ergeben sich aus den Startwerten die Bedingungen $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ sowie $\alpha_1(2+i) + \alpha_2(2-i) = 2$, also $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ und damit $a_n = \frac{(2+i)^n + (2-i)^n}{2}$. Auch wenn in der expliziten Formel also komplexe Zahlen vorkommen, setzt sich die Folge vollständig mit reellen (sogar ganzen) Zahlen fort:

$$1, 2, 3, 2, -7, -38, -117, -278, -527, -718, -237, 2642, \dots$$

Wir sehen aber, dass sich diese durchaus „chaotischer“ verhält als die Fibonacci-Folge. Wer mit der Geometrie der komplexen Zahlenebene etwas vertraut ist, kann sich dieses unterschiedliche Verhalten vielleicht sogar erklären...

1.2 Der allgemeine Fall

Ein entscheidender Schritt unserer Methode ist es, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu bestimmen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es zumindest in den komplexen Zahlen tatsächlich auch immer d Nullstellen. Allerdings gibt es für Polynomgleichungen höheren Grades keine allgemeine Lösungsformel mehr, es ist also nicht unbedingt möglich, die Nullstellen explizit zu bestimmen. In der Praxis hofft man vielleicht, einige Nullstellen raten zu können und durch Polynomdivision auf eine Gleichung kleineren Grades zu kommen, die wir schließlich allgemein lösen können.
Ein schwerwiegenderes theoretisches Problem unserer bisherigen Methode ist aber die Annahme, dass die Nullstellen des charakteristischen Polynoms *paarweise verschieden* sind. Im Allgemeinen kann es sicherlich vorkommen, dass eine Nullstelle mehrfach vorkommt, was dann zum Scheitern unseres Vorgehens führen kann:

Die Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ definiert durch die Startwerte $a_0 = 4, a_1 = 6, a_2 = 9$ sowie die Rekursion $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$ hat das charakteristische Polynom $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2)$. Wir haben also nur zwei Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$, weil letztere doppelt vorkommt. Der Ansatz $a_n = \alpha_1 \cdot \lambda_1^n + \alpha \cdot \lambda_2^n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2$ führt zusammen mit den Startwerten zu den Bedingungen $4 = \alpha_1 + \alpha_2, 6 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ sowie $9 = 4\alpha_1 + \alpha_2$, welches keine Lösung besitzt. Wir könnten zwar $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ wählen, sodass die resultierende Folge $2 \cdot 2^n + 2$ die richtigen Werte a_1 und a_2 hätte. Diese würde dann aber statt $a_3 = 9$ den Wert 10 vorschlagen.

Das Problem im vorigen Beispiel ist, dass wir bei einer doppelten Nullstelle weniger als d verschiedene Nullstellen haben und damit in unserem resultierenden Gleichungssystem weiterhin d Gleichungen, aber nur noch $d - 1$ Koeffizienten haben.
Zwar kann es zufällig passieren, dass dieses System weiterhin lösbar ist (wie es etwa bei den Startwerten $4, 6, 10$ im vorigen Beispiel der Fall gewesen wäre, sodass wir tatsächlich die explizite Form $2 \cdot 2^n + 2$ erhalten hätten), aber im Allgemeinen wird ein solches Gleichungssystem überbestimmt sein und keine Lösung mehr besitzen.

Die Lösung dieses Problems ist, mehr Lösungstypen zu „raten“, um bei der Bestimmung der Koeffizienten wieder mehr Freiheitsgrade zur Verfügung zu haben. Was zu tun ist, sehen wir am besten am einfachsten Beispiel:

Die Rekursion $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ hat charakteristisches Polynom $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Sicherlich erfüllen konstante Funktionen $a_n = \alpha$ die Lösung, aber auch $a_n = n$ ist eine Lösung und allgemeiner beliebige lineare Polynome $an + b$.
Genauso ist $(an+b)\lambda^n$ eine Lösung der Rekursion $a_{n+2} = 2\lambda a_{n+1} - \lambda^2 a_n$ mit charakteristischem Polynom $(x-\lambda)^2$.

Diese Beobachtung lässt sich verallgemeinern:

Beobachtung: Hat das charakteristische Polynom der Rekursion einer Folge (a_n) die k-fache Nullstelle λ, so ist $a_n = P(n)\lambda^n$ für jedes Polynom P von Grad höchstens $k-1$ eine Lösung der Rekursion.

Für den Beweis ist es nützlich, den *verallgemeinerten Differenzoperator* einzuführen: Für ein Polynom $P(x) = c_d x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ und eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definieren wir dazu eine neue Folge $(\Delta_P a_n)_{n=0}^{\infty}$

$$\Delta_P a_n = c_d a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \cdots + c_0 a_n.$$

Ein wichtiges Beispiel sind die sogenannten **finiten Differenzen** einer Folge, die durch die Vorschrift $\Delta_k = \Delta_{(x-1)^k}$ definiert sind. Beispielsweise ist $\Delta a_n := \Delta_1 a_n = a_{n+1} - a_n$. Rekursionsgleichungen können wir nun kompakt schreiben als $\Delta_Q a_n = 0$, wenn Q das charakteristische Polynom der Rekursion ist.

Eine fundamentale Eigenschaft, die man direkt durch Einsetzen nachprüfen kann, ist, dass $\Delta_{PQ} a_n = \Delta_P(\Delta_Q a_n)$ gilt, d.h. den Differenzoperator bzgl. des Produkts zweier Polynome anzuwenden, ist das gleiche, wie die beiden einzelnen hintereinander auszuführen. Insbesondere erhalten wir, dass die k-te finite Differenz

$$\Delta_k a_n = a_{n+k} - \binom{k}{1} a_{n+k-1} + \binom{k}{2} a_{n+k-2} - \cdots \pm a_n$$

übereinstimmt mit der k-maligen Anwendung Δ^k von $\Delta = \Delta_1$.
Ist insbesondere $a_n = P(n)$ für ein Polynom P von Grad d, so ist (Nachrechnen!) die Differenzenfolge $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = P(n+1) - P(n)$ ein Polynom von Grad $d-1$ und induktiv $\Delta^k a_n$ ein Polynom von Grad $d-k$, insbesondere ist $\Delta^d a_n$ konstant und $\Delta^{d+1} a_n$ die Nullfolge.
Aus diesen Überlegungen ergibt sich nun unmittelbar die (auch in anderen Zusammenhängen interessante) Identität

$$P(n+k) - \binom{k}{1} P(n+k-1) + \binom{k}{2} P(n+k-2) - \cdots \pm P(n) = 0,$$

falls P ein Polynom von Grad höchstens $k-1$ ist.
Nun haben wir alle Zutaten für den Beweis zusammen:

Beweis der Beobachtung: Indem wir a_n durch a_n/λ^n ersetzen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\lambda = 1$ gilt. Ist Q das charakteristische Polynom der Rekursion, so gilt nach Annahme $Q(x) = (x-1)^k R(x)$ für ein Polynom R. Wir wollen $\Delta_Q P(n) = 0$ zeigen. Wegen $\Delta_Q = \Delta_R \Delta_k$ genügt es sicherlich $\Delta_k P(n) = 0$ zu zeigen. Dies ist aber genau die oben hergeleitete Tatsache, weil der Grad von P höchstens $k-1$ ist. $\square$

Damit haben wir nun wieder genug Parameter in unserem Ansatz, um auch im allgemeinen Fall so viele Freiheitsgrade wie Startwert-Bedingungen zu erhalten, dass unser Gleichungssystem lösbar ist:

„Rezept“ zum Lösen homogener linearer Rekursionen:

- Wir wollen zu einer Rekursion $a_{n+d} = c_{d-1}a_{n+d-1} + \cdots + c_0 a_n$ mit gegebenen Startwerten $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ eine Lösung bestimmen.

i) Wir berechnen zunächst die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $x^d - c_{d-1}x^{d-1} - \cdots - c_1 x - c_0$. Zählen wir diese mit Vielfachheiten, gibt es zumindest über den komplexen Zahlen tatsächlich auch genau d solche Nullstellen.

ii) Für einfache Nullstellen λ bleiben wir beim Ansatz $\alpha \cdot \lambda^n$. Für doppelte Nullstellen verwenden wir nun den Ansatz $(\alpha n + \beta) \cdot \lambda^n$ und allgemein bei k-fachen Nullstellen den Ansatz $P_\lambda(n) \cdot \lambda^n$, wobei P_λ ein Polynom von Grad höchstens $k - 1$ ist.

iii) Die allgemeine Lösung der Rekursion ist dann von der Art

$$P_{\lambda_1}(n) \cdot \lambda_1^n + \cdots + P_{\lambda_j}(n) \cdot \lambda_j^n,$$

wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$ die verschiedenen Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind. Für $k = 1$ verwenden wir einfach $P_\lambda = \alpha$ als konstantes Polynom. In jedem Fall haben wir genau k Koeffizienten in P_λ zur Wahl, insgesamt also genau so viele Koeffizienten wie die Summe der Vielfachheiten der Nullstellen, also genau d.

iv) Setzen wir nun die d Anfangsbedingungen ein, erhalten wir ein System aus d linearen Gleichungen in d Variablen, welches eine eindeutige Lösung besitzt.

Lediglich den Beweis der Lösbarkeit in Schritt iv) müssen wir an dieser Stelle auf den nächsten Abschnitt verschieben. Wie auch im vorherigen Fall der verschiedenen Nullstellen ist dieser aber praktisch nicht relevant, da wir im konkreten Fall einfach explizit die Lösungen bestimmen – wie zuvor ist dann auch tatsächlich sofort bewiesen, dass die so konstruierte explizite Form unsere Folge korrekt beschreibt!

In unserem Beispiel von oben mit $a_0 = 4, a_1 = 6, a_2 = 9$ und der Rekursion $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$ hatten wir das charakterische Polynom $(x-1)^2(x-2)$ mit der einfachen Nullstelle $\lambda_1 = 2$ und der doppelten Nullstelle $\lambda_2 = 1$. Wir sollten also als Ansatz

$$\alpha \cdot \lambda_1^n + (\beta n + \gamma) \cdot \lambda_2^n = \alpha \cdot 2^n + \beta n + \gamma$$

wählen. Aus den Startwerten ergeben sich nun die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 4 \\ 2\alpha + \beta + \gamma &= 6 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma &= 9 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung $\alpha = \beta = 1, \gamma = 3$, also die Lösung $a_n = 2^n + n + 3$.

1.3 Inhomogene Rekursionen

Zuletzt wollen wir noch an einem Beispiel sehen, wie wir auch *inhomogene Rekursionen* lösen können:

Eine Folge sei rekursiv definiert durch $a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1} + 1$. Die $+1$ am Ende sorgt dafür, dass wir unser Konzept von eben nicht mehr anwenden können. Wir können aber den folgenden Trick verwenden:

Es gilt auch $a_{n+3} = 2a_{n+1} - a_{n+2} + 1$. Nun können wir beide Gleichungen voneinander abziehen und erhalten

$$a_{n+3} - a_{n+2} = (2a_{n+1} - a_{n+2}) - (2a_n - a_{n+1}),$$

was sich zu

$$a_{n+3} = 3a_{n+1} - 2a_n$$

vereinfachen lässt. Wir sind also die $+1$ losgeworden, aber haben dafür die Länge der Rekursion um 1 erhöht. Allgemeiner kann man auf diese Weise den Grad eines inhomogenen Terms um 1 verkleinern, falls dieser ein Polynom in n ist. Ggf. muss man diesen Trick also wiederholt anwenden. Das charakteristische Polynom ist nun $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ und wir erhalten die allgemeine Lösung $a_n = \alpha \cdot (-2)^n + \beta n + \gamma$, in die wir nun die Startwerte einsetzen können. Allerdings müssen wir zunächst noch einen weiteren Startwert der ursprünglichen Folge berechnen, weil wir die Länge unserer Rekursion ja künstlich um 1 verlängert haben.

1.4 Aufgaben

Aufgabe 1.1: Bestimme eine explizite Formel für die Lucas-Zahlen L_n.

Aufgabe 1.2: Gegeben sei die Folge (a_n) durch $a_0 = -4, a_1 = -7$ und $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ für $n \geq 0$. Zeige, dass es unendlich viele n gibt, für die a_n eine zusammengesetzte positive ganze Zahl ist.

Aufgabe 1.3: Sei n eine natürliche Zahl. Berechne

$$\binom{n}{0}n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \cdots \pm \binom{n}{n-1}1^n.$$

Kannst du auch einen kombinatorischen Beweis finden?

Die Idee der folgenden beiden (offen gestellten) Aufgaben ist es, ein Gefühl dafür zu entwickeln, dass je nach zu untersuchender Fragestellung explizite Form, Rekursion oder andere Darstellungen einer Folge hilfreicher sein können:

Aufgabe 1.4: Beweise die *Catalan-Identität*

$$F_{m+n}F_{m-n} = F_m^2 - (-1)^{m+n}F_n^2.$$

(Der Fall $n = 1$, also $F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 = (-1)^m$ wird auch als *Cassini-Identität* bezeichnet.) Versuche dabei, die Rechnungen so übersichtlich wie möglich zu halten.
Fertige (ggf. auch durch Recherche in Büchern oder im Internet) eine Liste mit weiteren Eigenschaften der Fibonaccizahlen an (Teilbarkeiten, Identitäten,...) und überlege jeweils, ob sich diese eher aus der Rekursionsgleichung oder der expliziten Form beweisen lassen.

Aufgabe 1.5: Sei n eine natürliche Zahl. Zeige, dass es ein Polynom T_n gibt, sodass $T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$ für alle Winkel α gilt (T_n heißt *Tschebyschow-Polynom*). Finde eine Rekursion für die Folge (T_n) von Polynomen. Kannst du auch eine „explizite Form“ finden?
Berechne die ersten 8 Polynome und versuche möglichst viele Beobachtungen zu sammeln (z.B. über Grad, Koeffizienten, Werte,...). Welche davon lassen sich am besten mithilfe der ursprünglichen Definition, welche mithilfe der Rekursion und welche mithilfe der expliziten Formel zeigen?

Aufgabe 1.6: Sei n eine natürliche Zahl. Zeige, dass

$$\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)^{2n} + \left(2\sin\frac{2\pi}{7}\right)^{2n} + \left(2\sin\frac{3\pi}{7}\right)^{2n}$$

eine ganze Zahl ist, die durch $7^{\left[\frac{n}{3}\right]}$ teilbar ist.

2 Erzeugende Funktionen

Im letzten Abschnitt haben wir eine Methode zur Lösung linearer Rekursionen kennengelernt, die darauf beruht, genügend verschiedene Lösungsfolgen zu „raten", um dann die gesuchte Folge als Linearkombination solcher Folgen in Abhängigkeit von den Startwerten schreiben zu können.
In diesem Abschnitt wollen wir einen systematischeren Zugang kennenlernen, den der *erzeugenden Funktionen*. Dieser wird uns erlauben, die Ergebnisse des ersten Abschnitts neu zu interpretieren, aber auch allgemeinere Probleme zu untersuchen.

2.1 Was sind erzeugende Funktionen?

Folgen bestehen (typischerweise) aus unendlich vielen Zahlen. Erzeugende Funktionen sind eine Möglichkeit, die Information dieser unendlich vielen Zahlen in *einem* Objekt zu speichern.
Zu einer Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definieren wir ihre **erzeugende Funktion**

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots.$$

Die Notation $A(x)$ suggeriert, dass dies eine Funktion von x ist, in die wir (ähnlich wie z.B. bei einem Polynom) Werte von x einsetzen können und Zahlenwerte herausbekommen. Anders als bei einem Polynom (bei dem es nur endlich viele Summanden gibt) müsste man sich dann allerdings zunächst Gedanken darüber machen, ob diese unendliche Summe einen sinnvollen Zahlenwert hat (ob sie also *konvergiert*) bzw. für welche Werte von x dies der Fall ist. Dies führt dann zum Gebiet der *mathematischen Analysis* und wird hier nicht weiter verfolgt. Stattdessen wollen wir die erzeugende Funktion wirklich allein als formales Objekt verstehen.[a] In gewissem Sinne ist eine solche **formale Potenzreihe** damit zunächst nichts anderes als die Folge ihrer Koeffizienten – und damit die ursprüngliche Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ selbst.

[a] Insbesondere ist es dann durchaus sinnvoll, auch erzeugende Funktionen wie $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ zu betrachten, die für keinen Wert von x (außer 0) konvergieren.

Was ist dann aber der Mehrwert der erzeugenden Funktion gegenüber der ursprünglichen Folge? Bevor wir diese Frage beantworten, untersuchen wir zunächst einige Rechenoperationen, die wir auch mit den ursprünglichen Folgen durchgeführt haben.

Haben wir zwei formale Potenzreihen $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, so ist die Summe $A(x) + B(x)$ (per Definition) die erzeugende Funktion der Folge $(a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$:

$$A(x) + B(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n.$$

Analog können wir zu einer Zahl c auch $cA(x)$ als die erzeugende Funktion der Folge $(ca_n)_{n=0}^{\infty}$ definieren:

$$cA(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ca_n x^n.$$

Oben hatten wir die Analogie von formalen Potenzreihen zu Polynomen erwähnt. Tatsächlich sind Polynome Spezialfälle von formalen Potenzreihen, wenn wir Folgen betrachten, die ab irgendeinem Punkt 0 werden: Zum Beispiel ist gehört zur Folge $(1, 3, 0, 2, 0, 0, 0, \dots)$ als erzeugende Funktion das Polynom $1 + 3x + 2x^3$.

Bei Polynomen gibt es nun aber auch eine weitere wichtige Operation neben der Addition und der Multiplikation eines Polynoms mit einer Zahl, nämlich die Multiplikation von Polynomen: Multiplizieren wir in einem Produkt

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_\ell x^\ell)$$

alle Terme aus und gruppieren die mit der gleichen Potenz von x zusammen, erhalten wir wieder ein Polynom und zwar

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + a_kb_\ell x^{k+\ell}.$$

Allgemein erhalten wir den Koeffizienten von x^n als

$$a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0,$$

also genau die Summe der Terme a_ib_j, wo die Summe $i+j$ gleich n ist. Dabei können einige Terme fehlen, wenn die entsprechenden Indizes größer als der Grad der Polynome sind. Wir können die entsprechenden Koeffizienten aber einfach auf Null setzen, dann ist der obige Ausdruck in jedem Fall richtig. Für formale Potenzreihen können wir nun exakt das gleiche tun:

Wir definieren das Produkt zweier formaler Potenzreihen $A(x) = \sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ und $B(x) = \sum_{n=0}^\infty b_nx^n$ als die erzeugende Funktion

$$A(x)B(x) := \sum_{n=0}^\infty c_nx^n$$

der Folge

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_ib_j = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0.$$

Entscheidend ist, dass auch bei den unendlichen Potenzreihen jeder Koeffizient des Produkts nur von endlich vielen Koeffizienten der Faktoren abhängt. Wir müssen also zu keinem Zeitpunkt unendliche Summen berechnen!

Natürlich hätten wir auch einfach für zwei Folgen $(a_0, a_1, \dots)$ und $(b_0, b_1, \dots)$ ihr Produkt als die Folge $(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \dots)$ definieren können, aber dies wäre eine sehr komische Definition gewesen, die erst im Kontext der formalen Potenzreihen sinnvoll aussieht. Zum Beispiel wäre es bei dieser Definition fast wie ein Wunder erschienen, dass die beiden Produkte $(A(x)B(x))C(x)$ und $A(x)(B(x)C(x))$ übereinstimmen, während uns dies ausgehend von der Überlegung zu Polynomen nicht überraschen sollte.

Als erste Anwendung wollen wir die Operationen aus dem letzten Abschnitt in die Sprache von erzeugenden Funktionen übertragen.
Beispielsweise können wir für eine beliebige formale Potenzreihe $A(x) = \sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ nun die Potenzreihe

$$(1-x)A(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + (a_3 - a_2)x^3 + \dots$$

betrachten, die (bis auf den ersten Wert) genau die finiten Differenzen der Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ als Koeffizienten enthält: Es ist $(1-x)A(x) = a_0 + xB(x)$, wenn B die erzeugende Funktion der Folge Δa_n ist.
Allgemeiner können wir untersuchen, was für ein beliebiges Polynom $P(x) = c_dx^d + \cdots + c_1x + c_0$ von Grad d die Reihe $P(x)A(x)$ ist: Nach Definition ist der Koeffizient von x^{n+d} hier einfach

$$c_0a_{n+d} + c_1a_{n+d-1} + \cdots + c_da_n,$$

also genau $\Delta_{\overline{P}} a_n$, wenn $\overline{P}(x) = c_0 x^d + c_1 x^{d-1} + \dots + c_d$ das zu P *reziproke* Polynom ist, bei dem die Reihenfolge der Koeffizienten gegenüber P also genau umgekehrt wird.
Ab dem Koeffizienten von x^d stimmt die Reihe $P(x)A(x)$ also mit der Folge $\Delta_{\overline{P}} a_n$ überein!
Ist insbesondere $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine rekursive Folge der Länge d mit charakteristischem Polynom P, so ist $\overline{P}(x) \cdot A(x)$ ein Polynom von Grad höchstens $d - 1$.

Als Beispiel sehen wir die Gleichheit

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = 1,$$

die vielen wahrscheinlich in der Form

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

als *geometrische Reihe* bekannt ist. Allerdings ist es dann meist so gemeint, dass für bestimmte Werte von x (meist $|x| < 1$) der Wert der unendlichen Reihe auf der linken Seite bei Einsetzen von x gleich der Zahl $\frac{1}{1-x}$ ist.
In unserer Situation meinen wir dies aber einfach im Sinne der Definition des Produkts oben: Wenn wir die formale Potenzreihe $1+x+x^2+x^3+\dots$ und die Reihe $1-x$ (also die erzeugende Funktion der Folge $(1, -1, 0, 0, 0, \dots)$ multiplizieren, erhalten wir die Reihe 1 (also die erzeugende Funktion der Folge $(1, 0, 0, \dots)$).

Es ist dennoch erstrebenswert, auch Ausdrücke wie $\frac{1}{1-x}$ verwenden zu können. Allgemeiner können wir uns fragen, wann ein Ausdruck $\frac{1}{A(x)}$ wieder als Potenzreihe interpretiert werden kann. Zu welchen $A(x)$ gibt es eine Reihe $B(x)$ mit $A(x)B(x) = 1$, also einen Kehrwert zu A?

Satz: Eine Potenzreihe $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat genau dann einen Kehrwert $B(x) = \frac{1}{A(x)}$, also eine Potenzreihe $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mit $A(x)B(x) = 1$, wenn $a_0 \neq 0$ ist.
Wir sagen auch, dass $A(x)$ *invertierbar* ist.

Beweis: Wir suchen also eine Folge $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, für das die Folge $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ die Bedingung $c_0 = 1$ und $c_1 = c_2 = \dots = 0$ erfüllt.
Die erste Bedingung sagt also $a_0 b_0 = 1$. Ist $a_0 = 0$, können wir also sicherlich schon einmal kein Inverses finden. Sonst definiert diese Gleichung b_0 eindeutig. Die nächste Bedingung ist dann $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$. Hier ist alles außer b_1 bereits festgelegt. Wegen $a_0 \neq 0$ können wir diese Gleichung nach b_1 auflösen. Die nächste Bedingung ist dann $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0$. Auch hier ist alles außer b_2 bereits festgelegt, wegen $a_0 \neq 0$ können wir dann auch b_2 so bestimmen, dass die Gleichung gilt. Dies können wir iterativ so fortführen, die Bedingung $c_n = 0$ ergibt immer eine lineare Bedingung für b_n mit Koeffizient $a_0 \neq 0$. $\square$

Von nun an dürfen wir also auch Ausdrücke wie $\frac{A(x)}{B(x)}$ verwenden, falls $B(x)$ die Bedingung aus dem obigen Satz erfüllt, also einen konstanten Koeffizienten verschieden von Null hat. Dies ist insbesondere immer der Fall für $\overline{P}(x)$, wenn P das charakteristische Polynom einer Rekursion ist, denn dann ist der Leitkoeffizient von P und damit der konstante Koeffizient von $\overline{P}$ immer gleich 1.
Man überzeugt sich dann leicht davon, dass man mit diesen Ausdrücken genauso wie mit Brüchen rechnen kann, z.B. gilt

$$\frac{A(x)}{B(x)} + \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)D(x) + B(x)C(x)}{B(x)D(x)},$$

falls $B(x)$ und D invertierbar sind (dann ist tatsächlich auch $B(x)D(x)$ invertierbar!)

Aus unseren obigen Überlegungen folgt nun, dass wir die erzeugende Funktion einer rekursiven Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ der Länge d als $A(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ schreiben können, wenn $P(x)$ reziprok zum charakteristischen Polynom der Rekursionsgleichung und $Q(x)$ ein Polynom von Grad höchstens $d-1$ (abhängig von den Startwerten) ist.

Als Beispiel wollen wir die erzeugende Funktion $F(x)$ der Fibonaccifolge $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ bestimmen. Das charakteristische Polynom ist x^2-x-1, das reziproke Polynom also $1-x-x^2$. Es ist

$$(1-x-x^2)F(x) = F_0+(F_1-F_0)x+(F_2-F_1-F_0)x^2+(F_3-F_2-F_1)x^3+\cdots = F_0+(F_1-F_0)x$$

und damit

$$F(x) = \frac{F_0+(F_1-F_0)x}{1-x-x^2} = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Für die Lucas-Folge $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ würden wir analog die erzeugende Funktion

$$L(x) = \frac{L_0+(L_1-L_0)x}{1-x-x^2} = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

erhalten.

Damit haben wir nun eine effiziente Methode, die erzeugende Funktion einer rekursiven Folge zu bestimmen. Wie hilft uns das jedoch, um eine explizite Form der Folge zu berechnen?

Das entscheidende Stichwort ist hier **Partialbruchzerlegung**. Dies erlaubt uns, eine *rationale Funktion* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ als Summe von einfacheren Ausdrücken zu zerlegen.

Beispiel: Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei gegeben durch $a_0=0, a_1=1$ sowie die Rekursion $a_{n+2} = 5a_{n+1}-6a_n$. Das charakteristische Polynom ist $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, das reziproke Polynom also $1-5x+6x^2 = (1-2x)(1-3x)$. Damit erfüllt die erzeugende Funktion

$$(1-5x+6x^2)A(x) = a_0+(a_1-5a_0)x+(a_2-5a_1+6a_0)x^2+\cdots = a_0+(a_1-5a_0)x = x,$$

also

$$A(x) = \frac{x}{1-5x+6x^2} = \frac{x}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{(1-2x)-(1-3x)}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1-2x}.$$

Wir haben die Reihe $A(x)$, deren Darstellung zunächst ein quadratisches Polynom im Nenner hatte, also durch geschickte Umformung als eine Summe von zwei Termen geschrieben, bei denen nur noch ein linearer Ausdruck im Nenner steht. Wie bei der geometrischen Reihe überzeugt man sich nun leicht davon, dass

$$\frac{1}{1-3x} = 1+3x+9x^2+27x^3+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

und analog $\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ ist. Insgesamt erhalten wir damit $a_n = 3^n - 2^n$.

Dies ist natürlich kompatibel mit den Ergebnissen des ersten Abschnitts, die uns aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms auf die Formel $a_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n$ schließen lassen. Wir überlegen uns jetzt, dass eine geschickte Umformung der rationalen Funktion wie im vorigen Beispiel immer möglich ist. Dazu zeigen wir zunächst:

Allgemeine Partialbruchzerlegung: Sind $Q(x)$ und $P(x)$ Polynome mit $\deg Q < \deg P$ und hat P die Faktorisierung $P(x) = P_1(x)P_2(x)\dots P_k(x)$ in paarweise teilerfremde Polynome $P_1, \dots, P_k$ (also ohne gemeinsamen Faktor), so gibt es eindeutige Polynome $Q_1(x), \dots, Q_k(x)$ mit $\deg Q_i < \deg P_i$, für die

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{Q(x)}{P_1(x) \cdot \dots \cdot P_k(x)} = \frac{Q_1(x)}{P_1(x)} + \dots + \frac{Q_k(x)}{P_k(x)}$$

gilt.

Beweis: Nach Induktion über k genügt es den Fall $k = 2$ zu betrachten. Wegen der Teilerfremdheit von P_1 und P_2 gibt es dann Polynome $A_1(x)$ und $A_2(x)$ mit $A_2(x)P_1(x) + A_1(x)P_2(x) = 1$. Dies lässt sich wie bei teilerfremden ganzen Zahlen (Lemma von Bézout) mit dem Euklidischen Algorithmus zeigen. Hier muss man die Division von ganzen Zahlen mit Rest durch Polynomdivision mit Rest ersetzen. Anders formuliert gilt also:

$$\frac{1}{P_1(x)P_2(x)} = \frac{A_1(x)}{P_1(x)} + \frac{A_2(x)}{P_2(x)}.$$

Damit ergibt sich jetzt

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1(x)Q(x)}{P_1(x)} + \frac{A_2(x)Q(x)}{P_2(x)}.$$

Hier können wir die Zähler auf der rechten Seite mit Rest durch P_1 bzw. P_2 teilen. Definieren wir Q_1 und Q_2 als die Reste, so gilt automatisch $\deg Q_i < \deg P_i$ und es ergibt sich die Darstellung

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{Q_1(x)}{P_1(x)} + \frac{Q_2(x)}{P_2(x)} + R(x)$$

für ein gewisses Polynom $R(x)$. Wenn in dieser Gleichung x aber sehr groß wird, werden wegen der Grad-Bedingung alle Terme außer $R(x)$ beliebig klein. Dann muss aber R das Nullpolynom sein und wir haben die gewünschte Darstellung. Die Eindeutigkeit wird der Leserin als Übung überlassen. $\square$

Hat insbesondere $P(x) = \prod_{i=1}^{d}(x - \lambda_i)$ paarweise verschiedene Nullstellen λ_i, so ergibt sich eine Zerlegung

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{d} \frac{c_i}{x - \lambda_i}.$$

Ist $P(x) = \prod_{i=1}^{d}(1 - \lambda_i x)$ das reziproke Polynom des charakteristischen Polynoms einer linearen Rekursion, so können wir

$$A(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\alpha_i}{1 - \lambda_i x}$$

schreiben. Wie im Beispiel oben zeigt man leicht

$$\frac{1}{1 - \lambda x} = 1 + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n$$

und es ergibt sich sofort $a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \dots + \alpha_d \lambda_d^n$.

Wie bestimmen wir in der Praxis die Koeffizienten c_i? Auch wenn unser Beweis der Partialbruchzerlegung konstruktiv war, gibt es meist deutlich schnellere Wege. Ein nützlicher Trick ist oft der folgende: Wir multiplizieren unsere Gleichung mit $x - \lambda_1$ (sodass dieser Faktor nirgends mehr im Nenner steht) und setzen dann $x = \lambda_1$ ein. Rechts bleibt dann nur c_1 stehen, da alle anderen Terme einen Faktor $x - \lambda_1$ haben, der nun Null wird. Links steht eine Zahl, die dann der gesuchte Wert von c_1 ist. Analog verfahren wir mit den anderen c_i.[2]
Für die linearen Rekursionen verwenden wir die reziproken Polynome, daher sieht das ganze etwas anders aus, funktioniert aber eigentlich genauso:

Für die Fibonaccifolge $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ suchen wir eine Zerlegung

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)} = \frac{\alpha_1}{1-\lambda_1 x} + \frac{\alpha_2}{1-\lambda_2 x},$$

wenn $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ist. Multiplizieren wir mit $1 - \lambda_1 x$ und setzen $x = \frac{1}{\lambda_1}$ ein, erhalten wir

$$\alpha_1 = \frac{1/\lambda_1}{1-\lambda_2/\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

und analog $\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, also wiederum die Binet-Formel.

Was passiert nun bei mehrfachen Nullstellen? Dazu betrachten wir zunächst noch einmal das Beispiel aus dem vorigen Abschnitt:

Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definiert durch die Startwerte $a_0 = 4, a_1 = 6, a_2 = 9$ sowie die Rekursion $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$ hat das charakteristische Polynom $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2)$. Für die erzeugende Funktion erhalten wir

$$(1 - 4x + 5x^2 - 2x^3)A(x) = a_0 + (a_1 - 4a_0)x + (a_2 - 4a_1 + 5a_2)x^2 = 4 - 10x + 5x^2$$

und damit

$$A(x) = \frac{4 - 10x + 5x^2}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{3-2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-2x}$$

(den Koeffizienten von $\frac{1}{1-2x}$ kann man mit der gleichen Methode wie oben bestimmen, danach können wir diesen Teil der Summe einfach abziehen und den Rest ausrechnen). Der Summand $\frac{1}{1-2x}$ gibt wie zuvor einen Beitrag von 2^n zu a_n, doch was ist mit dem anderen Summanden? Der Trick ist, diesen weiter zu zerlegen:

$$\frac{3-2x}{(1-x)^2} = \frac{1+2(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x}.$$

Der zweite Summand (geometrische Reihe!) wird einfach 2 zu a_n beitragen. Damit bleibt nur noch die Bestimmung von $\frac{1}{(1-x)^2}$. Wir werden gleich sehen, dass die Antwort

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

ist. Damit ergibt sich insgesamt tatsächlich $a_n = 2^n + (n+1) + 2 = 2^n + n + 3$.

[2] Warum ist es erlaubt, Zahlen einzusetzen, obwohl wir doch mit formalen Ausdrücken rechnen? Der Grund ist, dass wir es hier (nach Multiplikation mit allen Nennern) mit Polynomgleichungen zu tun haben und in diese natürlich Werte eingesetzt werden können. Aus dem gleichen Grund dürfen wir auch nach Multiplikation mit $x - \lambda$ noch $x = \lambda$ einsetzen, denn die entsprechende Polynomgleichung gilt zwar zunächst nur für $x \neq \lambda$, aber damit (als Polynomgleichung) für alle x und damit insbesondere auch für $x = \lambda$.

Im allgemeinen Fall erhalten wir zunächst eine Zerlegung in Summanden der Form $\frac{C(x)}{(x-\lambda)^k}$ für ein Polynom $C(x)$ von Grad höchstens $k-1$, wenn λ eine k-fache Nullstelle von $P(x)$ ist. Dann können wir aber eine Darstellung

$$C(x) = c_k + c_{k-1}(x-\lambda) + c_{k-2}(x-\lambda)^2 + \cdots + c_1(x-\lambda)^{k-1}$$

finden (die c_i sind einfach die Koeffizienten des Polynoms $C(x+\lambda)$) und erhalten

$$\frac{C(x)}{(x-\lambda)^k} = \frac{c_1}{x-\lambda} + \frac{c_2}{(x-\lambda)^2} + \cdots + \frac{c_k}{(x-\lambda)^k}.$$

Bei einer k-fachen Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms einer Rekursion erhalten wir analog eine Zerlegung der erzeugenden Funktion in Summen der Form

$$\frac{c_1}{1-\lambda x} + \frac{c_2}{(1-\lambda x)^2} + \cdots + \frac{c_k}{(1-\lambda x)^k}.$$

Es bleibt also, die Koeffizienten der Potenzreihe $\frac{1}{(1-\lambda x)^k}$ zu bestimmen. Allgemein erhalten wir hier das folgende:

„Negativer Binomischer Lehrsatz“: Es ist

$$\frac{1}{(1-x)^k} = 1 + kx + \binom{k+1}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}x^n$$

und damit

$$\frac{1}{(1-\lambda x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\lambda^n x^n.$$

Beispielsweise ist

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

und (Dreieckszahlen!)

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n.$$

Beweis: Wir verwenden Induktion über k, wobei der Induktionsanfang $k = 1$ (oder $k = 0$) bereits bekannt ist. Beim Schritt von k nach $k+1$ genügt es, zu zeigen, dass die rechte Seite für $k+1$ nach Multiplikation mit $1-x$ in die rechte Seite für k übergeht. Dazu müssen wir aber nur die finiten Differenzen der rechten Seite berechnen, diese sind

$$\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

nach der bekannten Rekursion für Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck. Also sind die finiten Differenzen der Koeffizienten für $k+1$ genau die Koeffizienten für k und nach Induktionsvoraussetzung damit die Koeffizienten von $\frac{1}{(1-x)^k}$. Beispielsweise haben wir hier benutzt, dass die finiten Differenzen der linearen Folge $n+1$ die konstante Folge 1 sind, und die finiten Differenzen der Folge $\binom{n+2}{2}$ der Dreieckszahlen die lineare Folge $n+1$ bilden.

Insgesamt ergibt sich aus unserem Summanden

$$\frac{c_1}{1-\lambda x} + \frac{c_2}{(1-\lambda x)^2} + \cdots + \frac{c_k}{(1-\lambda x)^k}$$

damit ein Beitrag von

$$\left(c_1 + c_2(n+1) + c_3\binom{n+2}{2} + \cdots + c_k\binom{n+k-1}{k-1}\right)\lambda^n$$

zu a_n, was tatsächlich von der Form $P_\lambda(n)\lambda^n$ für ein Polynom P_λ von Grad höchstens $k-1$ ist. Damit haben wir die Ergebnisse aus dem ersten Abschnitt nun auf einem neuen Weg erhalten. Während dort im allgemeinen Fall noch nicht bewiesen war, dass man die Koeffizienten auch immer geeignet wählen kann, haben wir dies nun nicht nur gezeigt, sondern auch eine sehr effiziente Methode erhalten, diese in der Praxis tatsächlich zu berechnen.

Als kleine Anwendung untersuchen wir Summenformeln für Polynome: Ist P ein Polynom von Grad d, so wissen wir, dass die erzeugende Funktion $\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \frac{A(x)}{(1-x)^{d+1}}$ für ein Polynom $A(x)$ ist. Dann ist

$$\frac{A(x)}{(1-x)^{d+2}} = \frac{1}{1-x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = P(0)+(P(0)+P(1))x+(P(0)+P(1)+P(2))x^2+\ldots,$$

andererseits ist die linke Seite die erzeugende Funktion eines Polynoms Q von Grad $d+1$. Wir haben also gezeigt, dass es für jedes Polynom P von Grad d ein Polynom Q von Grad $d+1$ gibt mit

$$P(0)+P(1)+P(2)+\cdots+P(n) = Q(n).$$

Dies beinhaltet die bekannten Summenformeln

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ 1^2+2^2+\cdots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ 1^3+2^3+\cdots+n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

usw., die allgemein auch als *Faulhaber-Formeln* bekannt sind.
Es gibt allerdings einen effizienteren Weg, diese Ausdrücke explizit zu bestimmen: Dazu zerlegen wir $P(n)$ als Summe

$$P(n) = a_0 + a_1 n + a_2\binom{n}{2} + \cdots + a_d\binom{n}{d}$$

und erhalten

$$Q(n) = a_0(n+1) + a_1\binom{n+1}{2} + a_2\binom{n+1}{3} + \cdots + a_d\binom{n+1}{d+1},$$

analog zur Überlegung im vorigen Beweis. Beispielsweise ergibt sich aus der Zerlegung

$$n^2 = 1\cdot n + 2\cdot\binom{n}{2}$$

unmittelbar

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = 1\cdot\binom{n+1}{2} + 2\cdot\binom{n+1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.2 Aufgaben

Aufgabe 2.1: Was ist die erzeugende Funktion der Folge der Tschebyschow-Polynome (T_n)? (Tipp: Hier wird es zwei Variablen geben, die du nicht beide x nennen solltest...)

Aufgabe 2.2: Sei $A(x)$ eine formale Potenzreihe mit $a_0 \neq 0$. Zeige, dass $A(x)$ genau zwei *Quadratwurzeln* hat, d.h. es gibt genau zwei formale Potenzreihen $W(x)$ (mit komplexen Zahlen als Koeffizienten) mit $W(x)^2 = A(x)$.

Aufgabe 2.3: Bestimme $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$ und $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Was passiert für $N \to \infty$? Kannst du das Ergebnis verallgemeinern?

Aufgabe 2.4: Wir untersuchen die Faulhaber-Polynome $P_d(x)$ mit

$$1^d + 2^d + \cdots + n^d = P_d(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Berechne $P_4(x)$. Stelle auf der Basis der Form von $P_1(n), P_2(n), P_3(n), P_4(n)$ Vermutungen über die Polynome P_d auf (z.B. über Koeffizienten, Faktoren, Werte,...) und versuche möglichst viele davon zu beweisen.

Aufgabe 2.5: Für gegebene natürliche Zahlen a, b, c sei $f(n)$ die Anzahl an ganzzahligen Lösungen (x, y, z) mit $x, y, z \geq 0$ und $ax + by + cz = n$. Finde die erzeugende Funktion $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$ und die dazugehörige Rekursion für $f(n)$ (was davon findest du einfacher?). Bestimme für $a = 2, b = c = 1$ die Folge $f(n)$ explizit.

Aufgabe 2.6: a) Sei $p(n)$ die Anzahl an Partitionen von n, also der Anzahl an Möglichkeiten, n als Summe von positiven ganzen Zahlen zu schreiben. Zum Beispiel ist $p(5) = 7$ wegen

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Zeige, dass die erzeugende Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k} = \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^3} \cdot \ldots$$

erfüllt (warum ist das unendliche Produkt auf der rechten Seite ein sinnvoller Ausdruck?).
b) Zeige, dass es gleich viele Möglichkeiten gibt, n als Summe von paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen zu schreiben, wie Möglichkeiten, n nur als Summe von ungeraden (aber nicht notwendigerweise verschiedenen) Zahlen zu schreiben. Beispielsweise gibt es für $n = 5$ jeweils drei solche Möglichkeiten, $5 = 3 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ bzw. $5 = 4 + 1 = 3 + 2$.

3 Neue Anwendungen

In diesem letzten Abschnitt wollen wir einige weitere Anwendungen von erzeugenden Funktionen besprechen, bei denen sich die Vielseitigkeit und die Stärke erzeugender Funktionen zeigt.

3.1 Die Catalan-Zahlen

Bisher haben wir nur lineare Rekursionen gelöst. Das ist ein besonders schöner Fall, weil sich hier eine vollständige Theorie aufstellen lässt. Wie wir gleich sehen werden, können erzeugende Funktionen durchaus auch für andere Rekursionen nützlich sein, allerdings muss man dann oft etwas kreativ werden.

Wir wollen dies am Beispiel der *Catalan-Zahlen* $(C_n)_{n=0}^{\infty}$ veranschaulichen. Eine mögliche Beschreibung[3] für C_n ist die Anzahl an Möglichkeiten, n geöffnete Klammern und n geschlossene Klammern so aufzuschreiben, dass zu keinem Zeitpunkt mehr Klammern geschlossen als geöffnet wurden.

Beispielsweise ist $C_1 = 1$, weil nur () möglich ist, dagegen ist $C_2 = 2$, weil (()) und ()() möglich sind, oder $C_3 = 5$, weil ((())) oder (()()) oder (())() oder ()(()) oder ()()() möglich sind. Danach wird es schon schnell unübersichtlich. Wir einigen uns außerdem auf die Konvention $C_0 = 1$ („es gibt genau eine Möglichkeit, überhaupt keine Klammern zu setzen“).

Wie können wir systematisch etwas über die Folge herausfinden? Sicherlich ist hier eine gewisse rekursive Struktur vorhanden: Wenn nach der ersten geöffneten Klammer direkt eine geschlossene kommt, gibt es für den Rest genau C_{n-1} Möglichkeiten. Wenn nach vier Stellen zum ersten Mal alle geöffneten Klammern auch wieder geschlossen wurden, gibt es danach noch C_{n-2} Möglichkeiten und vorher muss es (()) gewesen sein.

Wenn nach sechs Stellen zum ersten Mal alle geöffneten Klammern auch wieder geschlossen wurden, gibt es danach noch C_{n-3} Möglichkeiten. Für den Teil vorher gibt es jetzt aber zwei Möglichkeiten, nämlich ((())) und (()()). Dies trägt also $2C_{n-3}$ zu C_n bei.

Sollen nach acht Stellen zum ersten Mal alle geöffneten Klammern wieder geschlossen sein, müssen wir mit einer der fünf Möglichkeiten (((()))), ((()())), ((())()), (()(())), (()()()) begonnen haben. Kommt uns das bekannt vor? Die Folge $1, 1, 2, 5, \dots$ sieht wieder wie die Catalan-Folge aus!

Wie geht hier das Muster weiter? Wenn nach $2k$ Stellen zum ersten Mal alle geöffneten Klammern auch wieder geschlossen wurden, gibt es danach noch C_{n-k} Möglichkeiten, aber wie viele gibt es für den Teil davor? Die Beobachtung von oben ist, dass es genau C_{k-1} solche Möglichkeiten gibt. Dies liegt daran, dass wir wegen der Minimalität von k das äußere Klammerpaar weglassen können und eine gültige Lösung mit $k-1$ Klammerpaaren erhalten (und umgekehrt). Insbesondere gibt es insgesamt $C_{n-1}C_0 = C_{n-1}$ Möglichkeiten, bei denen $k = n$ ist, also sich erst im letzten Schritt alles auflöst.

Wir erhalten also die Rekursion

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$

Diese Rekursion ist nun – ganz unabhängig von der Frage einer expliziten Formel – schon einmal enorm praktisch, um weitere Folgeglieder zu berechnen, etwa erhalten wir jetzt $C_4 = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 14$, dann $C_5 = 14 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 14 = 42$, dann $C_6 = 132, C_7 = 429, C_8 = 1430$, fast ohne Rechenaufwand.

[3] Tatsächlich sind die Catalan-Zahlen unter anderem deshalb so wichtig, weil sie es unglaublich viele verschiedene kombinatorische Interpretationen gibt, bei denen auch zunächst nicht immer einfach zu sehen ist, dass sie auf die gleiche Folge führen. Es gibt sogar ein ganzes Buch über die Catalan-Zahlen (von Richard Stanley).

Um die Folge nun weiter zu untersuchen, betrachten wir wie im vorigen Abschnitt die erzeugende Funktion

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + 132x^6 + \dots .$$

Die oben hergeleitete Rekursion sieht zwar sehr anders aus als alle vorigen, aber der (nicht-lineare) Ausdruck auf der rechten Seite könnte uns an die Definition des Produkts zweier Potenzreihen erinnern! Tatsächlich ist der Koeffizient von x^n in $C(x)^2$ genau

$$\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = C_{n+1}$$

und damit

$$C(x)^2 = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots,$$

also

$$1 + xC(x)^2 = C(x).$$

Während wir aus linearen Rekursionen auch stets lineare Gleichungen für die erzeugende Funktion erhalten haben, ergibt sich aus der nicht-linearen Gleichung für die Catalan-Zahlen hier also auch eine nicht-lineare, genauer eine quadratische Gleichung für $C(x)$. Diese können wir nun mit der üblichen Methode der Vervollständigung des Quadrats lösen. Dazu schreiben wir sie zunächst als

$$(2xC(x) - 1)^2 = 1 - 4x.$$

Als nächstes würden wir gerne auf beiden Seiten die Wurzel ziehen. Wie bei den Inversen ist dann $2xC(x) - 1$ die (bzw. genauer *eine*!) Wurzel von $1 - 4x$ genau in diesem Sinne, dass ihr Quadrat gleich $1 - 4x$ ist. Schreiben wir

$$W(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + w_3 x^3 + \dots$$

für eine Wurzel aus $1 - 4x$, so können wir die Koeffizienten von $W(x)^2$ und $1 - 4x$ vergleichen: Der konstante Koeffizient ist $w_0^2 = 1$, also sollten wir $w_0 = \pm 1$ wählen. Aus dieser Wahl ist dann wie bei den Inversen iterativ alles eindeutig bestimmt: Beispielsweise erhalten wir für die Wahl von $w_0 = 1$ aus dem Koeffizienten von x die Bedingung $-4 = 2w_0 w_1$, also $w_1 = -2$, dann aus dem Koeffizienten von x^2 die Bedingung $0 = 2w_0 w_2 + w_1^2$ und damit $w_2 = -2$, dann aus dem Koeffizienten von x^3 die Bedingung $0 = 2w_0 w_3 + 2w_1 w_2$ und damit $w_3 = -4$, eine Wurzel wäre also

$$1 - 2x - 2x^2 - 4x^3 - \dots$$

Weil $2xC(x) - 1$ sicherlich konstanten Koeffizienten -1 hat, sollten wir die „negative Wurzel“ $-1 + 2x + 2x^2 + 4x^3 + \dots$ aus $1 - 4x$ wählen. Wir wissen nun also, dass es sie gibt und wie man sie rekursiv berechnet, aber bringt uns das einer expliziten Form näher?

Die Antwort auf diese Frage liegt im **verallgemeinerten Binomischen Lehrsatz**. Wir kennen bereits den Binomischen Lehrsatz

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \dots + x^n$$

für natürliche Zahlen n, den wir uns einfach kombinatorisch überlegen können. Aus dem Vergleich der Koeffizienten von x^k in der Identität

$$(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$$

erhalten wir die **Vandermonde-Identität**

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{m}{i}\binom{n}{j}$$

mit der Konvention $\binom{m}{i} = 0$ für $i > m$ (dies ist auch kompatibel mit dem binomischen Lehrsatz oben, in dem wir die Summationsbedingung $k \leq n$ dann auch weglassen können).

Können wir auch $n = \frac{1}{2}$ in den Binomischen Lehrsatz einsetzen, um $\sqrt{1+x}$ zu berechnen? Dazu überlegen wir uns zunächst, dass die Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k}$ auch für beliebige reelle Zahlen α und natürliche Zahlen k definiert werden können als

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Beispielsweise ist $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{1} = \alpha$, $\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$. Wir stellen an dieser Stelle noch einmal fest, dass dies kompatibel mit der üblichen Definition für $\binom{n}{k}$ ist und ebenfalls mit unserer Konvention $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$. Damit können wir nun für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$E_\alpha(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \dots$$

definieren. Der Binomische Lehrsatz sagt nun $E_n(x) = (1+x)^n$ für natürliche Zahlen n, aber für andere Werte von α wird die Reihe E_α im Allgemeinen kein Polynom sein, da die Koeffizienten $\binom{\alpha}{k}$ nicht irgendwann Null werden.
Wir behaupten nun, dass sich die Reihen E_α dennoch in gewissem Sinne wie $(1+x)^\alpha$ verhalten (auch wenn dieser Ausdruck für irrationale α erst einmal nicht sinnvoll definiert ist), genauer gesagt $E_\alpha(x)E_\beta(x) = E_{\alpha+\beta}(x)$.

Dies ist nach Koeffizientenvergleich äquivalent zur **allgemeinen Vandermonde-Identität**

$$\binom{\alpha+\beta}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{j},$$

die nun für beliebige natürliche Zahlen k, aber reelle Zahlen α und β gelten soll. Eine kurze Plausibilitätsüberprüfung: Für $k = 0$ ist die Gleichung einfach $1 = 1$, für $k = 1$ ist sie $\alpha + \beta = 1 \cdot \beta + \alpha \cdot 1$ und für $k = 2$ ist sie

$$\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2} = 1 \cdot \frac{\beta(\beta-1)}{2} + \alpha \cdot \beta + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot 1,$$

was sich direkt durch Ausmultiplizieren überprüfen lässt.
Der Trick ist nun der folgende: Für festes k sind beide Seiten der verallgemeinerten Vandermonde-Identität Polynome in α und β. Ist $\alpha = m$ eine feste natürliche Zahl, so wissen wir, dass diese Polynome für alle natürlichen Zahlen $\beta = n$ übereinstimmen. Zwei Polynome in β können aber nur dann an unendlich vielen Stellen übereinstimmen, wenn sie gleich sind. Also gilt die Identität für festes $\alpha = m \in \mathbb{N}$ und beliebige $\beta \in \mathbb{R}$.
Nun können wir das ganze aber umdrehen: Ist $\beta \in \mathbb{R}$ fest, so gilt die Gleichheit für unendlich viele Werte von α (nämlich alle natürlichen Zahlen) und damit für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Das war zu zeigen!

Als Konsequenz erhalten wir nun insbesondere $E_{1/2}(x)^2 = E_1(x) = 1 + x$, mit anderen Worten ist $E_{1/2}(x)$ eine Quadratwurzel von $1 + x$. Nun haben wir aber eine wirklich explizite Darstellung für die Koeffizienten! Wenn wir zurück zu den Catalan-Zahlen gehen, ist nun also $E_{1/2}(-4x)$ eine Wurzel aus $1 - 4x$ und zwar die positive (denn der konstante Koeffizient ist 1), also ist

$$2xC(x) - 1 = -E_{1/2}(-4x) = -\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n\binom{1/2}{n}x^n,$$

wir erhalten also C_n als die Hälfte des Koeffizienten von x^{n+1} rechts, also

$$C_n = -\frac{1}{2}\cdot(-4)^{n+1}\binom{1/2}{n+1}.$$

Beispielsweise ist $C_0 = -\frac{1}{2}\cdot(-4)\cdot\frac{1}{2} = 1$ und $C_1 = -\frac{1}{2}\cdot(-4)^2\cdot\frac{1/2\cdot(-1/2)}{2} = 1$.
Zum Glück lässt sich dieser Ausdruck (von dem zunächst gar nicht klar ist, dass es eine natürliche Zahl ergibt!) noch deutlich schöner schreiben: Es ist

$$\binom{1/2}{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{(-(2n-1)}{2}\right)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\frac{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

und damit erhalten wir endlich das wirklich schöne Ergebnis

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

Da wir uns schon die Mühe gemacht haben, den binomischen Lehrsatz in seiner vollen Allgemeinheit zu untersuchen, wollen wir nun noch zwei schnelle Anwendungen abgrasen:

Für natürliche Zahlen k ist sicherlich $E_{-k}(x)E_k(x) = E_0(x) = 1$, mit anderen Worten ist $E_{-k}(x)$ exakt das Inverse $\frac{1}{(1+x)^k}$ von $(1+x)^k$. Wegen

$$\binom{-k}{n} = \frac{(-k)(-k-1)\dots(-k-n+1)}{n!} = (-1)^n\binom{n+k-1}{n} = (-1)^n\binom{n+k-1}{k-1}$$

ergibt sich jetzt

$$\frac{1}{(1-x)^k} = E_{-k}(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-k}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}x^n$$

und wir haben noch einmal den „Negativen Binomischen Lehrsatz“ aus dem letzten Abschnitt bewiesen!

Schließlich können wir ähnlich wie bei den Catalan-Zahlen auch $\alpha = -1/2$ einsetzen: Wir erhalten

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{(2k-1)}{2}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k}{2^k}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2k-1)}{k!} = \frac{(-1)^k}{4^k}\cdot\binom{2k}{k}$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}x^k = E_{-1/2}(-4x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

Dies bedeutet natürlich nichts anderes als dass nach Quadrieren und Koeffizientenvergleich die folgende Identität gilt:

$$\sum_{i+j=k} \binom{2i}{i}\binom{2j}{j} = 4^k.$$

Die interessierte Leserin möge sich einen kombinatorischen Beweis dieser (gar nicht so offensichtlichen) Identität überlegen.

3.2 Formale Ableitungen

Eine wichtige Operation, die es für Funktionen (neben Addition, Multiplikation und Bildung von Kehrwerten) gibt, fehlt noch: Ableiten! Keine Sorge, wir werden nun nicht doch noch in die Analysis gehen, sondern Ableitungen von formalen Potenzreihen rein formal definieren. Ausgehend von der Beobachtung, dass bei Polynomen die Ableitung von x^n gleich nx^{n-1} ist, ist das ganz einfach:

Zu einer formalen Potenzreihe $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, definieren wir ihre Ableitung $A'(x)$ als die formale Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Man kann sich nun leicht (viel leichter als in der Analysis!) von den üblichen Rechenregeln für Ableitungen überzeugen: Für zwei Potenzreihen A und B gilt die *Summenregel*

$$(A+B)'(x) = A'(x) + B'(x),$$

die *Produktregel*

$$(A \cdot B)'(x) = A'(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot B'(x)$$

und die *Quotientenregel*

$$\left(\frac{A}{B}\right)'(x) = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B(x)^2},$$

falls B invertierbar ist. Beispielsweise ist bei der Produktregel der Koeffizient von x^{n-1} auf beiden Seiten gleich

$$n \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i+j=n} (ia_i) \cdot b_j + \sum_{i+j=n} a_i \cdot (jb_j)$$

und die Quotientenregel ergibt sich durch Anwendung der Produktregel auf das Produkt $A = B \cdot \frac{A}{B}$.

Eine nützliche Version der Produktregel ist

$$\frac{(A \cdot B)'(x)}{(A \cdot B)(x)} = \frac{A'(x)}{A(x)} + \frac{B'(x)}{B(x)},$$

von wo aus auch die Verallgemeinerung auf beliebig viele Faktoren sofort per Induktion klar wird:

$$\frac{(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k)'(x)}{(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k)(x)} = \frac{A_1'(x)}{A_1(x)} + \cdots + \frac{A_k'(x)}{A_k(x)}.$$

Als Anwendung wollen wir die **Newton-Identitäten** beweisen, für die wir etwas Vorbereitung benötigen:

Für d Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ und $k = 0, 1, \ldots, d$ betrachten wir die **elementarsymmetrischen Polynome**

$$e_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_d},$$

wobei die Summe über alle k-Tupel von Indizes $\{1, 2, \ldots, d\}$ läuft. Es ist also z.B. $e_0 = 1$, $e_1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_d$,

$$e_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{d-1}\lambda_d$$

und $e_d = \lambda_1 \ldots \lambda_d$. Diese Ausdrücke sind genau die Koeffizienten des Polynoms mit den Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$:

$$(x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_d) = x^d - e_1x^{d-1} + e_2x^{d-2} - \cdots \pm e_d.$$

(Diese Aussage, die direkt durch Ausmultiplizieren der linken Seite entsteht, heißt auch **Satz von Vieta**.) Außerdem betrachten wir für $k \geq 0$ die **Potenzsummen**

$$s_k = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_d^k.$$

Zum Beispiel ist $s_0 = d$, $s_1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_d = e_1$ und

$$s_2 = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_d^2 = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_d)^2 - 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{d-1}\lambda_d) = e_1^2 - 2e_2.$$

Es gelten also gewisse Relationen zwischen den verschiedenen Ausdrücken. Tatsächlich gilt der

Fundamentalsatz über elementarsymmetrische Polynome: Jedes symmetrische Polynom in $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$, insbesondere also auch jedes s_k, lässt sich als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen $e_1, \ldots, e_d$ schreiben.

Zum Beispiel ist $s_1 = e_1$, $s_2 = e_1^2 - 2e_2$ und $s_3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3$. Danach werden die Ausdrücke immer komplizierter. Wie können wir diese effizient berechnen?

Im ersten Abschnitt haben wir gelernt, dass Folgen wie $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ eine lineare Rekursion erfüllen und zwar genau mit dem charakteristischen Polynom, dessen Nullstellen die λ_i sind, dessen Koeffizienten also die elementarsymmetrischen Polynome e_i sind! Konkret ergibt sich damit die Rekursion

$$s_{n+d} = e_1s_{n+d-1} - e_2s_{n+d-2} + \cdots \pm e_ds_n.$$

Damit können wir rekursiv sehr einfach die s_n durch die e_i ausdrücken, allerdings nur, wenn wir bereits die „Startwerte“ $s_0, s_1, \ldots, s_{d-1}$ berechnet haben. Die Antwort hierauf liefern die Newton-Identitäten:

Newton-Identitäten: Für $1 \leq k \leq d$ gilt

$$ke_k = s_1e_{k-1} - s_2e_{k-2} + \cdots \pm s_ke_0.$$

Beweis: Wir betrachten die erzeugende Funktion

$$(1 - \lambda_1x)(1 - \lambda_2x) \ldots (1 - \lambda_dx) = 1 - e_1x + e_2x^2 - \cdots \pm e_dx^d.$$

Nennen wir die Gleichheit $A(x) = B(x)$, so ergibt sich auch $\frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{B'(x)}{B(x)}$.

Mit der oben hergeleiteten Produktregel können wir den Ausdruck auf der linken Seite als Summe über die einzelnen Faktoren schreiben und erhalten

$$\frac{-\lambda_1}{1-\lambda_1 x} + \cdots + \frac{-\lambda_d}{1-\lambda_d x} = \frac{-e_1 + 2e_2 x - 3e_3 x^2 + \cdots \pm d e_d x^{d-1}}{1 - e_1 x + e_2 x^2 + \cdots \pm e_d x^d}.$$

Nach Multiplikation beider Seiten mit -1 und Nutzen der geometrischen Reihe auf der linken Seite erhalten wir

$$s_1 + s_2 x + s_3 x^2 + s_4 x^3 + \cdots = \frac{e_1 - 2e_2 x + 3e_3 x^2 - \cdots \mp d e_d x^{d-1}}{1 - e_1 x + e_2 x^2 - \cdots \pm e_d x^d}.$$

Nun können wir mit dem Nenner der rechten Seite multiplizieren und auf beiden Seiten Koeffizienten vergleichen: Aus dem konstanten Koeffizienten erhalten wir $s_1 = e_1$, aus dem Koeffizienten von x^1 ergibt sich $2e_2 = s_1 e_1 - s_2$, aus dem Koeffizienten von x^2 ergibt sich $3e_3 = s_1 e_2 - s_2 e_1 + s_3$ usw. Allgemein erhalten wir die Newton-Identität für ke_k aus dem Koeffizienten von x^{k-1}. Für $k > d$ ist der Koeffizient auf der rechten Seite einfach Null und wir erhalten wieder die bereits oben hergeleitete Rekursionsgleichung. □

3.3 Der Einheitswurzelfilter

Aus dem Binomischen Lehrsatz

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

ergibt sich durch Einsetzen von $x = 1$ insbesondere die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

d.h. die Summe der Zahlen in der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks ist 2^n. Was aber, wenn wir nur jeden zweiten Binomialkoeffizienten aufsummieren wollen? Was ist also $\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k}$? (Wegen $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$ ist dies natürlich eine endliche Summe!)
Für ungerade n kann man direkt mit Symmetrie sehen, dass die Summe genau die Hälfte der gesamten Summe, also 2^{n-1} ist. Auch bei $n = 4$ ist aber z.B. $1 + 6 + 1$ genauso viel wie $4 + 4$, also jeweils die Hälfte! Können wir dies allgemein zeigen?
Dazu können wir den folgenden Trick anwenden: In

$$(1+x)^n + (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (1 + (-1)^k) \binom{n}{k} x^k$$

kommen die Terme mit geradem k mit Gewicht 2 vor, die ungeraden mit Gewicht 0. Setzen wir $x = 1$, so steht rechts also genau das doppelte der gesuchten Summe, links natürlich 2^n. Dies zeigt die obige Vermutung.
Allgemein erhalten wir für eine beliebige Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ die Identität

$$A(x) + A(-x) = 2(a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots),$$

also im Wesentlichen das Doppelte der erzeugenden Funktion der Teilfolge von $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ mit den geraden Indizes.

Was aber, wenn wir die Summe $\sum_{k\geq 0} \binom{n}{3k}$ ausrechnen wollen, also jeden dritten Term im Pascalschen Dreieck? Vielleicht erwarten wir, dass wir etwa ein Drittel der Summe, also ca. $\frac{2^n}{3}$ erhalten, aber das ist natürlich keine ganze Zahl.

Für $n = 1$ erhalten wir auch wirklich 1 (statt $\frac{2}{3}$), für $n = 2$ erhalten wir 1 (statt $\frac{4}{3}$) und für $n = 3$ ergibt sich 2 (statt $\frac{8}{3}$) und für $n = 4$ schließlich 5 (statt $\frac{16}{3}$).
Auch wenn die Heuristik nicht exakt stimmen kann, scheint sie also nicht so schlecht zu sein.

Um unsere Methode von oben zu verallgemeinern, benötigen wir **Einheitswurzeln**.

Die n-ten *Einheitswurzeln* sind die komplexen Nullstellen der Gleichung $x^n = 1$. Geometrisch (in der komplexen Zahlenebene) sind das die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks mit Mittelpunkt 0 und einer Ecke bei 1. Ist ω eine der beiden zu 1 benachbarten Ecken, so sind die anderen genau von der Form $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$.

Die wichtigste Tatsache für unsere Anwendung ist die folgende: Wir können sie benutzen, um Teilbarkeit durch n zu testen, es ist nämlich

$$\sum_{\omega^n=1} \omega^k = \begin{cases} n & n \mid k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei die Summe links über alle n-ten Einheitswurzeln ω läuft. Der Fall $n \mid k$ ist klar, denn dann sind alle Summanden 1 und die Summe somit 1. Sonst können wir die eine Nachbarwurzel ω von 1 wählen und wie oben die anderen als $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ schreiben. Dann wird die Summe zu

$$1^k + \omega^k + \omega^{2k} + \cdots + \omega^{(n-1)k} = \frac{\omega^{nk} - 1}{\omega^k - 1} = 0$$

nach der geometrischen Reihe. Damit ergibt sich nun

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{\omega^n=1} A(\omega x)\right) = a_0 + a_n x^n + a_{2n} x^{2n} + a_{3n} x^{3n} + \ldots,$$

also die erzeugende Funktion der Teilfolge der durch n teilbaren Indizes! Für $n = 2$ ist dies natürlich genau die vorher benutzte Identität, da die zweiten Einheitswurzeln einfach 1 und -1 sind.
Für $n = 3$ erhalten wir nun aber tatsächlich

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{6}x^6 + \cdots = \frac{(1+x)^n + (1+\omega x)^n + (1+\omega^2 x)^n}{3}$$

und insbesondere

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots = \frac{2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n}{3},$$

wenn $\omega = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ eine der beiden dritten Einheitswurzeln ist. Insbesondere ist $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (das ist genau die Identität oben für $k = 1$) und damit wird unsere Summe zu

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots = \frac{2^n + (-\omega^2)^n + (-\omega)^n}{3} = \frac{2^n - (-1)^n + (-1)^n(1^n + \omega^n + \omega^{2n})}{3}.$$

Nun können wir das oben beobachtete Muster leicht erklären: Ist n ein Vielfaches von 3, so ist die Summe einfach $\frac{2^n+2\cdot(-1)^n}{3}$, sonst ist sie $\frac{2^n-(-1)^n}{3}$, da die hintere Summe jeweils 3 oder 0 ist. In jedem Fall ist unsere Summe also tatsächlich maximal $\frac{2}{3}$ vom „Erwartungswert“ $\frac{2^n}{3}$ entfernt!

3.4 Schlangenöl

In den ersten Abschnitten haben wir gesehen, wie wir mithilfe von erzeugenden Funktionen für einen komplizierten Ausdruck eine einfache Form finden können. Manchmal haben wir stattdessen zwei komplizierte Ausdrücke gegeben, von denen wir zeigen wollen, dass sie gleich sind. Eine Möglichkeit dafür wäre, beide Seiten auszurechnen. In vielen Fällen ist das allerdings nicht möglich. Die Idee der **Schlangenöl-Methode** ist, die Identität zu beweisen, indem wir die erzeugenden Funktionen der beiden Seiten vergleichen. Wir illustrieren dies an einem Beispiel:

Gegeben seien natürliche Zahlen n und m. Zeige:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k$$

Lösung: Wir halten m fest und betrachten beide Seiten als Folgen in n, sagen wir ℓ_n und r_n. Wir wollen $\ell_n = r_n$ für alle n zeigen. Unser Plan ist, die beiden erzeugenden Funktionen $L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n x^n$ und $R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$ zu berechnen und $L(x) = R(x)$ zu zeigen. Dies ist natürlich äquivalent zur Behauptung. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned}
L(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} x^n \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{m} x^n \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{m} x^{n+k-m} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+m}{m} x^{j} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{x^{m-k}}{(1-x)^{m+1}} = \frac{x^m \left(1+\frac{1}{x}\right)^m}{(1-x)^{m+1}} = \frac{(1+x)^m}{(1-x)^{m+1}}.
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
R(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k x^n \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2^k \cdot \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \\
&= \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\frac{2x}{1-x}\right)^k \\
&= \frac{1}{1-x} \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)^m \\
&= \frac{(1+x)^m}{(1-x)^{m+1}},
\end{aligned}$$

damit folgt wirklich $R(x) = L(x)$ und damit $r_n = \ell_n$ für alle n. □

Diese Strategie ist vor allem dann nützlich, wenn man nach Vertauschen der beiden Summationen innen eine „bekannte“ Summe erhält, so wie in unserem Fall eine, die wir mit dem (Negativen) Binomischen Lehrsatz ausrechnen konnten.

Indem wir $m = n$ setzen, erhalten wir insbesondere die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 2^k.$$

Diese lässt sich aber nicht ohne weiteres mit der Schlangenöl-Methode berechnen, da die entsprechende erzeugende Funktion keine schöne Form besitzt. Dies ist also ein typischer Fall des Phänomens, dass eine allgemeinere Aussage oft einfacher zu zeigen ist als der Spezialfall! Hätten wir die obige Identität mit $m = n$ als Aufgabe erhalten, wäre ein entscheidender erster Schritt also gewesen, die richtige Zwei-Parameter-Identität mit m und n zu raten (sich also zu fragen, an welchen Stellen wirklich „dasselbe n“ steht!), die sich dann leicht mit Hinzugabe von etwas Schlangenöl beweisen lässt!

Erzeugende Funktionen haben noch viele weitere spannende Anwendungen, die wir in diesem Brief nicht besprechen können. Wer mehr wissen möchte, dem sei das (auch auf Schülerlevel) sehr lesbare Buch *generatingfunctionology* von Herbert Wilf empfohlen, das frei im Internet verfügbar ist.

3.5 Aufgaben

Aufgabe 3.1: Finde einen kombinatorischen Beweis der Vandermonde-Identität.

Aufgabe 3.2: Bestimme die Anzahl an Möglichkeiten, ein regelmäßiges n-Eck durch Einzeichnen von Diagonalen in Dreiecke zu zerlegen.

Aufgabe 3.3: Beweise den „Negativen Binomischen Lehrsatz“

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{m} x^k$$

noch einmal mithilfe formaler Ableitungen.

Aufgabe 3.4: Berechne

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots$$

in Abhängigkeit von n.

Aufgabe 3.5: Sei n eine natürliche Zahl. Zeige

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} = n+1.$$

Finde sowohl einen algebraischen als auch einen kombinatorischen Beweis!

Aufgabe 3.6: Zeige, dass es nicht möglich ist, die Menge der natürlichen Zahlen in endlich viele paarweise disjunkte Restklassen $\{n \in \mathbb{N} : n \equiv a \pmod{q}\}$ mit paarweise verschiedenen Werten von q zu zerlegen.
(Beispielsweise könnten wir die Restklasse $1 \pmod 2$, $0 \pmod 4$ und $2 \pmod 4$ betrachten, aber dann kommt der Wert $q = 4$ doppelt vor.)