IMO-Herbstzirkus 2023: Ungleichungen
Christian Bernert

1 AM-GM und seine Verwandten

Die meisten der Methoden, die in diesem Brief vorgestellt werden, haben seit spätestens 20 Jahren ihren festen Platz in der Olympiaden-Welt und gehören inzwischen in vielen Ländern zum Standard-Programm des Olympiade-Trainings. Entsprechend selten sind mittlerweile Aufgaben etwa in der IMO geworden, die man durch simple Anwendung dieser Methoden direkt „erschlagen“ kann. Dennoch bleiben diese Ideen eine sehr wichtige Grundlage und mit etwas Kreativität kann man auch heute noch IMO-Aufgaben damit lösen.

1.1 AM-GM

Wir beginnen mit einer der wichtigsten und bekanntesten Ungleichungen, derjenigen zwischen dem *arithmetischen Mittel* und dem *geometrischen Mittel*, kurz AM-GM.

Satz (AM-GM-Ungleichung): Ist n eine natürliche Zahl und sind $a_1, \ldots, a_n$ nichtnegative reelle Zahlen, dann gilt

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn alle a_i gleich sind.

Der Ausdruck auf der linken Seite ist der Durchschnittswert der Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und wird ihr *arithmetisches Mittel* genannt. Auch die rechte Seite bildet (auf eine andere, multiplikative Art) einen Mittelwert der Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und wird ihr *geometrisches Mittel* genannt. In Kürze besagt die AM-GM-Ungleichung also: $AM \geq GM$.
Später werden wir sehen, dass diese beiden Mittel Spezialfälle einer ganzen (unendlichen) Reihe von allgemeinen Mittelwerten sind, die ebenfalls eine Kette von Ungleichungen (die sogenannte *allgemeine Mittelungleichung*) erfüllen.
Für den Moment bleiben wir aber bei AM-GM und demonstrieren vor dem Beweis die Nützlichkeit anhand einer Aufgabe aus der Bundesrunde 2004.

Aufgabe: Gegeben seien vier nichtnegative reelle Zahlen a, b, c, d. Zeige:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 d + d^2 a.$$

Lösung: Es kann sich nicht um eine direkte Anwendung der AM-GM-Ungleichung handeln, denn auf beiden Seiten steht eine Summe (und nicht etwa auf einer ein Produkt). Wollen wir AM-GM anwenden, wissen wir aber, dass es sich bei der kleineren (also hier der rechten) Seite um die GM-Seite handeln muss. Unsere Strategie ist es also, die einzelnen Summanden rechts als geometrisches Mittel von Zahlen links zu schreiben. Da links nur dritte Potenzen vorkommen, bietet sich eine dritte Wurzel aus einem Produkt von drei Zahlen an und tatsächlich ist

$$a^2 b = \sqrt[3]{a^6 b^3} = \sqrt[3]{a^3 \cdot a^3 \cdot b^3} \leq \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3}$$

nach AM-GM. Summieren wir diese und die drei analogen Ungleichungen auf, erhalten wir tatsächlich die behauptete Ungleichung.

Will man eine Ungleichung mit AM-GM beweisen, ist es meist einfacher, mit der GM-Seite (also der kleineren Seite) anzufangen und zu versuchen, diese durch die Summanden auf der größeren Seite auszudrücken. Umgekehrt wären wir oben kaum auf die richtige Zerlegung gekommen, wenn wir mit der AM-Seite angefangen hätten!

Der Beweis von AM-GM verwendet eine auf den französischen Mathematiker Cauchy zurückgehende Methode, die aus naheliegenden Gründen *Vorwärts-Rückwärts-Induktion* genannt wird.

Beweis der AM-GM-Ungleichung: Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Für $n = 2$ müssen wir

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

zeigen. Nach Multiplikation mit 2 und Quadrieren müssen wir noch $(a_1 + a_2)^2 \geq 4a_1a_2$ beweisen. Dies ist aber nach Umformen äquivalent zu $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$, was offensichtlich richtig ist. Weiter gilt die Gleichheit auch tatsächlich genau für $a_1 = a_2$.
Wir können nun leicht ebenfalls die Ungleichung für $n = 4$ beweisen, denn es gilt

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_3a_4}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}} = \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4},$$

wobei wir dreimal die AM-GM-Ungleichung für $n = 2$ verwendet haben. Gleichheit kann nur auftreten, wenn in allen Schritten Gleichheit eintritt, dann müssen aber alle Variablen gleich sein. Allgemeiner zeigt das gleiche Argument: Gilt die Ungleichung für n Variablen, dann auch für $2n$ Variablen, denn das arithmetische Mittel von $a_1, \ldots, a_{2n}$ ist gleich

$$\frac{\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} + \frac{a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{n}}{2} \geq \frac{\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}\sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}}},$$

was wiederum das geometrische Mittel von $a_1, \ldots, a_{2n}$ ist. Hier haben wir zunächst die Ungleichung für n und dann die für 2 Variablen benutzt. Induktiv können wir nun sofort schließen, dass die Ungleichung für unendlich viele Werte von n, nämlich für alle Zweierpotenzen gilt. Wie wir etwa den Fall $n = 3$ beweisen können, ist dagegen weniger klar. Hier kommt nun der *Rückwärts*-Teil der *Vorwärts-Rückwärts-Induktion* ins Spiel: Wir benutzen die Ungleichung für $n = 4$, um sie für $n = 3$ zu beweisen!
Dazu seien a_1, a_2, a_3 beliebig. Wir führen nun noch eine künstliche neue vierte Variable ein, um die bereits bewiesene Ungleichung für $n = 4$ verwenden zu können. Genauer gesagt wählen wir die neue Variable als das arithmetische Mittel der ersten drei Variablen, $a_4 = \frac{a_1+a_2+a_3}{3}$. Dann ist

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4},$$

wobei wir die Ungleichung für vier Variablen und außerdem genutzt haben, dass sich das arithmetische Mittel durch Hinzufügen des arithmetischen Mittels selbst nicht verändert (dies lässt sich auch direkt nachrechnen, ist aber hoffentlich auch sehr intuitiv).
Wenn wir nun scharf hinsehen, haben wir $a_4 \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$ gezeigt, also $a_4^4 \geq a_1a_2a_3a_4$, also $a_4^3 \geq a_1a_2a_3$, also $a_4 \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$ und dies ist genau die AM-GM-Ungleichung für drei Variablen, wenn wir uns wieder an die Definition $a_4 = \frac{a_1+a_2+a_3}{3}$ erinnern!

Damit ist die Ungleichung für $n = 3$ bewiesen. Allgemeiner zeigt das gleiche Argument (überlege dir die Details als Übung einmal selbst!), dass aus der Ungleichung für n Variablen auch die für $n - 1$ Variablen folgt. Da wir es bereits für alle Zweierpotenzen per *Vorwärtsinduktion* bewiesen haben, können wir nun mit dieser *Rückwärtsinduktion* die Ungleichung auch für alle anderen Werte von n beweisen. $\square$

In unserer Lösung der Bundesrunden-Aufgabe oben steckte eine weitere wichtige Idee, nämlich *gewichtete Mittel*: Indem wir a^3 zweimal und b^3 nur einmal verwendet haben, konnten wir die symmetrische Summe links gegen die asymmetrische Summe rechts abschätzen. Allgemeiner gilt folgendes:

Satz (Gewichtetes AM-GM): Ist n eine natürliche Zahlen und sind $w_1, \ldots, w_n \geq$ nichtnegative reelle Zahlen mit $w_1 + \ldots + w_n = 1$ („Gewichte") und sind $a_1, \ldots, a_n$ nichtnegative reelle Zahlen, dann gilt

$$w_1 a_1 + \ldots + w_n a_n \geq a_1^{w_1} \ldots a_n^{w_n}.$$

Die linke Seite ist hier ein mit $w_1, \ldots, w_n$ gewichtetes arithmetisches Mittel, die rechte ein entsprechend gewichtetes geometrisches Mittel. Wir beachten, dass wir im Fall $w_1 = \cdots = w_n = \frac{1}{n}$ genau die „ungewichtete" AM-GM-Ungleichung von oben erhalten. Mit $w_1 = \frac{2}{3}$ und $w_2 = \frac{1}{3}$ erhalten wir $\frac{2a_1+a_2}{3} \geq a_1^{\frac{2}{3}} a_2^{\frac{1}{3}}$, die Ungleichung aus der Aufgabe von eben.
So wie wir diese gewichtete Ungleichung aus der ungewichteten AM-GM-Ungleichung gefolgert haben, lässt sich dies auch im allgemeinen Fall tun:

Beweis der gewichteten AM-GM-Ungleichung: Da wir jede reelle Zahl beliebig durch rationale Zahlen approximieren können, genügt es den Fall zu betrachten, in dem alle Gewichte rational sind. Bringen wir sie auf einen gemeinsamen Nenner, können wir $w_i = \frac{p_i}{q}$ mit nichtnegativen ganzen Zahlen p_i und $p_1 + \ldots + p_n = q$ schreiben. Die Behauptung ist nun aber

$$\frac{p_1 w_1 + \ldots + p_n w_n}{q} \geq \sqrt[q]{a_1^{p_1} \ldots a_n^{p_n}},$$

was wiederum aus der AM-GM-Ungleichung für die q Variablen $a_1, \ldots, a_1$, $a_2, \ldots, a_2, \ldots, a_n$ folgt, wobei wir a_1 genau p_1-mal verwenden, a_2 genau p_2-mal usw. $\square$

Typischerweise wendet man AM-GM wie in unserem Beispiel mit rationalen Gewichten an. Manchmal ist es aber schon nützlich zu wissen, dass dies auch für beliebige reelle Gewichte gilt, z.B. folgt für nichtnegative a, b, c mit $a + b + c = 1$ jetzt $a^a b^b c^c \leq a^2 + b^2 + c^2$ (warum?).

Als weiteres Beispiel für gewichtete Mittel wollen wir nun noch eine etwas trickreichere Aufgabe vom Baltic Way 2004 anschauen:

Aufgabe: Seien p, q, r positive reelle Zahlen mit $pqr = 1$ und n eine natürliche Zahl. Zeige:

$$\frac{1}{p^n + q^n + 1} + \frac{1}{q^n + r^n + 1} + \frac{1}{r^n + p^n + 1} \leq 1.$$

Lösung: Es genügt den Fall $n = 3$ zu betrachten (warum?). Nach Multiplikation mit allen Nennern ist die Behauptung äquivalent zu

$$2(p^3 + q^3 + r^3) + 2 \leq (p^3 + q^3)(q^3 + r^3)(r^3 + p^3).$$

Warum haben wir $n = 3$ und nicht $n = 1$ gewählt? So können wir die *Nebenbedingung* $pqr = 1$ ins Spiel bringen, um die Ungleichung zu *homogenisieren*.

Denn die äquivalente Ungleichung

$$2p^2q^2r^2(p^3+q^3+r^3)+2p^3q^3r^3 \le (p^3+q^3)(q^3+r^3)(r^3+p^3)$$

ist *homogen* von Grad 9, d.h. alle Terme haben Grad 9. Warum ist dies nützlich? Multiplizieren wir alle Variablen mit der gleichen Konstanten C, so werden beide Seiten mit C^9 multipliziert, an der Gültigkeit der Ungleichung ändert sich also nichts. Die Nebenbedingung $pqr = 1$ wird nun aber durch $pqr = C^9$ ersetzt. Da C beliebig war, kann auch pqr beliebig sein. Mit anderen Worten: Nach dem Homogenisieren können wir die Nebenbedingung $pqr = 1$ vergessen – die homogene Ungleichung für $pqr = 1$ ist äquivalent zur homogenen Ungleichung für beliebige p, q, r. Nach Ausmultiplizieren bleibt nun also noch

$$2p^5q^2r^2+2p^2q^5r^2+2p^2q^2r^5 \le p^6q^3+p^6r^3+q^6r^3+q^6p^3+r^6p^3+r^6q^3$$

zu zeigen. Hier wollen wir wieder gewichtetes AM-GM verwenden, beginnen also mit $p^5q^2r^2$ auf der linken Seite. Da rechts dritte Potenzen stehen, bietet sich wieder ein Mittel mit drei Variablen an. Mit etwas Probieren finden wir

$$p^5q^2r^2 = \sqrt[3]{p^{15}q^6r^6} = \sqrt[3]{p^6q^3\cdot p^6q^3\cdot r^6p^3} \le \frac{p^6q^3+p^6q^3+r^6p^3}{3}$$

und Aufsummieren dieser und der fünf analogen Ungleichungen zeigt die Behauptung.

Hier haben wir ein weiteres wichtiges Prinzip gesehen: Wir können eine **Nebenbedingung** verwenden, um eine **inhomogene** Ungleichung zu **homogenisieren**. Umgekehrt dürfen wir im Beweis einer homogenen Ungleichung ohne Nebenbedingungen die Gültigkeit einer Nebenbedingung wie $pqr = 1$ oder $p+q+r = 1$ o.B.d.A. annehmen.

1.2 Muirhead+Schur=Schuirhead

Wir wollen nun die Methode aus der letzten Aufgabe etwas systematisieren und fragen uns allgemein, wann wir eine *symmetrische*, *homogene* Ungleichung mit AM-GM beweisen können. Um den Überblick zu behalten, führen wir folgende Notation ein: Ist $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n)$ ein Tupel von n nichtnegativen reellen Zahlen, dann bezeichnen wir

$$[\mathbf{a}] = [a_1,\dots,a_n] = \sum_{\pi\in S_n} x_1^{a_{\pi(1)}}x_2^{a_{\pi(2)}}\dots x_n^{a_{\pi(n)}},$$

wobei S_n die Menge aller Permutationen der Zahlen $1, 2, \dots, n$ ist. Zum Beispiel ist

$$[1,2,3] = x^3y^2z+x^3yz^2+x^2y^3z+x^2yz^3+xy^2z^3+xy^3z^2.$$

Wichtig ist dabei, dass $[a_1,\dots,a_n]$ immer aus $n!$ Summanden besteht, auch wenn mehrere der a_i gleich sind. Zum Beispiel ist $[2,1,1] = 2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2$ oder $[1,1,1] = 6xyz$. Die Ungleichung aus der Aufgabe von oben können wir nun kompakt als $[5,2,2] \le [6,3,0]$ schreiben.

Können wir ein allgemeines Kriterium finden, wann die Ungleichung $[a_1,\dots,a_n] \ge [b_1,\dots,b_n]$ für alle $x_1,\dots,x_n \ge 0$ gilt? Zunächst können wir uns überlegen, was passiert, wenn wir alle x_i auf die gleiche Zahl T setzen. Die linke Seite ist dann einfach $n!T^{a_1+\dots+a_n}$, die rechte $n!T^{b_1+\dots+b_n}$. Indem wir T einerseits beliebig groß und andererseits beliebig klein machen, sehen wir, dass die gewünschte Ungleichung nur dann gelten kann, wenn $a_1+\dots+a_n = b_1+\dots+b_n$ gilt, mit anderen Worten: Die Ungleichung muss homogen sein!

Wir können aber noch mehr herausfinden: Nehmen wir o.B.d.A. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ und $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ an, dann können wir z.B. eine der Variablen auf T setzen und alle anderen auf 1. Für $T \to \infty$ wächst dann die linke Seite wie T^{a_1}, die rechte wie T^{b_1}. Die Ungleichung kann also nur gelten, wenn $a_1 \geq b_1$ gilt. Indem wir statt einer nun k der Variablen auf T setzen, erhalten wir analog $a_1 + \ldots + a_k \geq b_1 + \ldots + b_k$ für alle $1 \leq k \leq n$. Dies führt zu folgender

Definition: Sind $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ und $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ zwei n-Tupel von reellen Zahlen mit $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ und $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$, dann sagen wir, dass das Tupel $\mathbf{a}$ das Tupel $\mathbf{b}$ **majorisiert**, wenn

$$\begin{aligned} a_1 &\geq b_1, \\ a_1 + a_2 &\geq b_1 + b_2, \\ &\cdots \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} &\geq b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}, \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n &= b_1 + b_2 + \ldots + b_n \end{aligned}$$

gilt (ja, die letzte Bedingung ist eine Gleichheit!). Wir schreiben auch kurz $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$.

In dieser Notation folgt also aus der obigen Überlegung, dass $[\mathbf{a}] \geq [\mathbf{b}]$ *höchstens* dann für alle $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ gelten kann, wenn $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ gilt. Tatsächlich gilt aber auch die Umkehrung:

Satz (Muirhead-Ungleichung): Sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ zwei n-Tupel nichtnegativer reeller Zahlen, so gilt $[\mathbf{a}] \geq [\mathbf{b}]$ *genau dann* für alle $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, wenn $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ gilt.

Dies ist sehr nützlich, weil das Kriterium $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ in der Praxis sehr einfach zu überprüfen ist. Zum Beispiel folgt $[6, 3, 0] \geq [5, 2, 2]$ sofort wegen $6 \geq 5$ und $6+3 \geq 5+2$ und $6+3+0 = 5+2+2$.

Wie wir gleich sehen werden, benutzt der Beweis nur AM-GM. Statt Muirhead kann man also immer auch direkt (gewichtetes) AM-GM verwenden. Muirhead erspart einem allerdings, die Gewichte explizit zu bestimmen. Selbst wenn man Muirhead nicht zitieren möchte, liefert es eine präzise *Heuristik* dafür, wann gewichtetes AM-GM in Frage kommt.

Vor dem Beweis lösen wir noch schnell mit Muirhead die zweite Aufgabe der IMO 1995:

Aufgabe: Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc = 1$. Zeige:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lösung: Wir multiplizieren beide Seiten mit $2a^3b^3c^3(a+b)(b+c)(c+a)$ und erhalten nach Ausmultiplizieren (rechne es einmal selbst nach!) die äquivalente Ungleichung

$$[4, 4, 0] + 2 \cdot [4, 3, 1] + [3, 3, 2] \geq 3 \cdot [5, 4, 3] + [4, 4, 4].$$

Hier ist die rechte Seite von Grad 12 und die linke von Grad 8. Wir haben aber noch nicht die Nebenbedingung $abc = 1$ benutzt. Mit dieser ist $[5, 4, 3] = \left[\frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right]$ und $[4, 4, 4] = \left[\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right]$ und die Behauptung folgt nach Muirhead wegen $\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) \prec (3, 3, 2)$ sowie $\left(\frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right) \prec (4, 3, 1) \prec (4, 4, 0)$.

Tipp: Um Rechenfehler zu entdecken (z.B. Vergessen der Vorfaktoren bei gleichen Exponenten), vergleiche immer die Anzahl an Summanden (hier je 24, also viermal $[a_1, a_2, a_3]$).

Beweis der Muirhead-Ungleichung: Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Wir untersuchen nun den Fall $n = 2$ (danach werden wir feststellen, dass damit eigentlich die ganze Arbeit bereits getan ist): Wir haben also $a_1 \geq a_2 \geq 0$ und $b_1 \geq b_2 \geq 0$ mit $a_1 \geq b_1$ und $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$. Daraus folgt sofort $a_1 \geq b_1 \geq b_2 \geq a_2 \geq 0$. Indem wir alles durch $(x_1x_2)^{a_2}$ teilen, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $a_2 = 0$ gilt, wir müssen dann

$$x_1^{b_1+b_2} + x_2^{b_1+b_2} \geq x_1^{b_1}x_2^{b_2} + x_1^{b_2}x_2^{b_1}$$

beweisen. Dies folgt nun aber z.B. mit gewichtetem AM-GM (wie genau?) oder aus dem äquivalenten $(x_1^{b_1} - x_2^{b_1})(x_1^{b_2} - x_2^{b_2}) \geq 0$, denn hier sind beide Faktoren nichtnegativ, wenn wir o.B.d.A. $x_1 \geq x_2$ annehmen.
Wir beweisen nun den allgemeinen Fall per Induktion über $n \geq 3$. Gibt es einen Index k mit $a_k = b_k$, so können wir diesen entfernen und die Ungleichung folgt aus der Ungleichung für die resultierenden $(n-1)$-Tupel nach Induktionsvoraussetzung (wie genau?). Gibt es keinen solchen Index k, dann gibt es sicherlich ein $k \geq 1$ mit $a_1 > b_1, a_2 > b_2, \ldots$ und $a_k > b_k$, aber $a_{k+1} < b_{k+1}$, also $a_k > b_k \geq b_{k+1} > a_{k+1}$. Sei $d = \min(a_k - b_k, b_{k+1} - a_{k+1})$ die kleinere der beiden Differenzen.
Ersetzen wir nun $\mathbf{b}$ durch das Tupel $\mathbf{b}' = (b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k + d, b_{k+1} - d, b_{k+2}, \ldots, b_n)$, so überzeugen wir uns leicht davon, dass $\mathbf{b} \prec \mathbf{b}' \prec \mathbf{a}$ gilt (warum genau?). Wegen $n \geq 3$ haben nun aber die Tupel $\mathbf{b}$ und $\mathbf{b}'$ einen gemeinsamen Eintrag und nach Wahl von d haben auch $\mathbf{b}'$ und $\mathbf{a}$ einen gemeinsamen Eintrag. Nach obigem Argument bzw. nach Induktionsvoraussetzung gilt daher $[\mathbf{b}] \leq [\mathbf{b}']$ sowie $[\mathbf{b}'] \leq [\mathbf{a}]$, also auch $[\mathbf{b}] \leq [\mathbf{a}]$. $\square$

Mit etwas scharfem Hinsehen zeigt der Beweis eigentlich sogar, dass es $n!$ Gewichte gibt, sodass wir $\mathbf{b}$ als entsprechend gewichtete Summe des Tupels $\mathbf{a}$ und seinen Permutationen schreiben können. Wir können also die Ungleichung $[\mathbf{b}] \leq [\mathbf{a}]$ mit gewichtetem AM-GM beweisen!

Nicht alle symmetrischen, homogenen Ungleichungen lassen sich mit Muirhead bzw. AM-GM beweisen. Ein wichtiges Beispiel ist die **Schur-Ungleichung**

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2$$

bzw. $[3, 0, 0] + [1, 1, 1] \geq 2 \cdot [2, 1, 0]$ die für $x, y, z \geq 0$ gilt. Tatsächlich hat die Schur-Ungleichung neben dem Gleichheitsfall $x = y = z$ auch den Gleichheitsfall $x = y, z = 0$, dieser kann bei Anwendung von AM-GM aber unmöglich erhalten bleiben!

1.3 Aufgaben

Die Aufgaben sind in etwa nach Schwierigkeit geordnet und mit den Inhalten des Briefes lösbar.

Aufgabe 1.1: Sei n eine natürliche Zahl. Zeige: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

Aufgabe 1.2: Gegeben seien positive reelle Zahlen x, y, z. Zeige:

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{x + y + z}{2}.$$

Aufgabe 1.3: Gegeben seien positive reellen Zahlen a, b, c mit $abc = 1$. Zeige: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$.

Aufgabe 1.4: Gegeben seien positive reelle Zahlen $a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ mit Produkt 1. Zeige:

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Aufgabe 1.5: Gegeben seien positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ sowie die Eulersche Zahl e. Zeige:

$$x_1 + \sqrt{x_1x_2} + \sqrt[3]{x_1x_2x_3} + \ldots + \sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n} \leq e(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

2 Cauchy-Schwarz, Hölder und die allgemeine Mittelungleichung

2.1 Die CSU und ihre Verwandten

Wir beginnen diesen zweiten Abschnitt mit einer weiteren, sehr wichtigen Ungleichung, die auch (im Gegensatz zu den Mittelungleichungen) in der Universitätsmathematik eine prominente Rolle spielt.

Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung/CSU): Sind $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ zwei Folgen von reellen Zahlen, dann gilt

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn eines der Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ein skalares Vielfaches des anderen ist (d.h. $a_i = \lambda b_i$ für eine reelle Zahl λ oder umgekehrt).

Es gibt verschiedene nützliche Wege, über die Cauchy-Schwarz-Ungleichung nachzudenken:

- Kombinatorisch: Wir haben zwei Folgen (a_i) und (b_i), die wir individuell gut verstehen. Mit der CSU bekommen wir dann eine Obergrenze für ~~Migranten~~ den gemischten Ausdruck $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$, die jeweils nur Summen über die einzelnen Folgen beinhaltet, d.h. wir trennen die beiden Folgen voneinander.

- Geometrisch: Wir können $A = (a_1, \ldots, a_n)$ und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ als Punkte im n-dimensionalen Raum betrachten. Ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel, erhalten wir rechts das Produkt $|OA| \cdot |OB|$ und links das sogenannte *Skalarprodukt* der Vektoren $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$. Man kann zeigen, dass der Quotient des Skalarprodukts durch $|OA| \cdot |OB|$ genau $|\cos \angle BOA|$ ist. Dann sagt Cauchy-Schwarz einfach, dass der Kosinus im Betrag höchstens 1 ist und die Gleichheit gilt tatsächlich genau dann, wenn der Winkel 0 oder 180° beträgt, d.h. wenn O, A und B auf einer Geraden liegen!

Statt obere Schranken für einen Ausdruck der Form $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ kann man auch untere Schranken für Summen von Brüchen erhalten. Dazu wählen viele eine Variante der CSU:

Satz (CDU/Engel-Form der CSU[a]/Titu's (T2's) Lemma[b]): Sind $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ zwei Folgen von positiven reellen Zahlen, dann gilt

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

[a] Nach Arthur Engel (1928–2022), dem langjährigen deutschen IMO-Delegationsleiter, einigen vielleicht durch das Buch *Problem Solving Strategies* bekannt.

[b] Nach Titu Andreescu, dem langjährigen Trainer der US-Amerikanischen IMO-Mannschaft

Natürlich ist leicht zu durchschauen, dass CDU und CSU äquivalent zueinander sind (warum?). Als erste Anwendung wollen wir noch einmal die zweite Aufgabe der IMO 1995 aus dem letzten Kapitel lösen:

Aufgabe: Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc = 1$. Zeige:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lösung: Verwenden wir direkt die CDU, erhalten wir für die linke Seite die untere Schranke

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{9}{a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b)}.$$

Dies kann nun aber beliebig klein werden, denn wir können a und b und damit etwa a^3b und damit den gesamten Nenner beliebig groß machen. An dieser Stelle war die CDU also nicht gut genug. Wir können aber geschickter sein: Nach der Nebenbedingung ist

$$LHS = \frac{b^2c^2}{a(b+c)} + \frac{a^2c^2}{b(a+c)} + \frac{a^2b^2}{c(a+b)} \overset{CDU}{\geq} \frac{(ab+bc+ca)^2}{a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)} = \frac{ab+bc+ca}{2}.$$

Wir müssen nun noch $ab+bc+ca \geq 3$ beweisen. Dies folgt aber leicht aus AM-GM. □

Wir geben nun gleich zwei Beweise der CSU, weil beide eine lehrreiche Idee beinhalten:

1. Beweis der CSU: Ausmultiplizieren und Zusammenfassen zeigt

$$(a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2)-(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2 = \sum_{i,j}(a_i^2b_j^2-a_ia_jb_ib_j) = \sum_{i<j}(a_ib_j-a_jb_i)^2 \geq 0.$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $a_ib_j = a_jb_i$ für alle i,j gilt und das ist äquivalent zur obigen Behauptung (im Wesentlichen sagt die Bedingung direkt $\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j}$, man muss nur etwas aufpassen, weil einige der Einträge Null sein könnten). □

Dieser Beweis ist wahrscheinlich der kürzeste, vor allem aber zeigt die Idee sogar folgendes: Gilt „fast“ Gleichheit in der CSU, dann müssen wir auch „nahe“ beim exakten Gleichheitsfall sein in dem Sinne, dass „die meisten“ der Differenzen $a_ib_j - a_jb_i$ klein sein müssen.

Wir demonstrieren dieses Prinzip mit einer Aufgabe aus der West-Chinesischen MO von 2002:

Aufgabe: Sei n eine natürliche Zahl. Bestimme alle Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ von ganzen Zahlen mit

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n^2,$$
$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \leq n^3 + 1.$$

Lösung: Natürlich ist $(n, n, \ldots, n)$ eine Lösung. Wir zeigen, dass es die einzige ist. Nach Cauchy-Schwarz ist

$$n^4 + n \geq n(a_1^2 + \ldots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \geq n^4.$$

Wäre $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \leq n^3$, folgt sofort, dass überall Gleichheit gelten muss und somit alle a_i gleich n sein müssen, analog schließen wir $a_1 + \ldots + a_n \geq n^2 + 1$ aus. Wir können also $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2$ und $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = n^3 + 1$ annehmen. Nun ist die Ungleichung wahr, aber wir haben immer noch einen „Fast-Gleichheits-Fall“, genauer gilt wie oben

$$n = n(a_1^2 + \ldots + a_n^2) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = \sum_{i<j}(a_i - a_j)^2.$$

Nähme a_i nun mindestens drei verschiedene Werte an, folgt leicht (wie genau?), dass mindestens n der Differenzen $a_i - a_j$ von Null verschieden sind und natürlich können nicht alle ± 1 sein, Widerspruch! Es bleibt der Fall, dass die Folge genau zwei Werte annimmt, und diesen erledigt man leicht von Hand. □

2. Beweis der CSU: O.B.d.A. sind alle Variablen nichtnegativ, denn sonst können wir die Vorzeichen alle entfernen, dabei bleibt die rechte Seite gleich und die linke Seite wird nach der Dreiecksungleichung höchstens größer. Nach AM-GM ist

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \leq \frac{a_1^2 + b_1^2}{2} + \ldots + \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{2} + \frac{b_1^2 + \ldots + b_n^2}{2}.$$

Dies ist nun allerdings wiederum nach AM-GM auch *größer* als die andere Seite der CSU, wir haben also zu schwach abgeschätzt. Dies ist auch nicht weiter überraschend, da die Gleichheit bei AM-GM ja nur für $a_i = b_i$ gelten würde, der Gleichheitsfall bei Cauchy-Schwarz ist aber allgemeiner! Dies motiviert die folgende Idee, die Folgen unterschiedlich zu gewichten: Für zunächst beliebiges $\lambda > 0$ ist nämlich

$$a_1b_1 = (\lambda a_1) \cdot \frac{b_1}{\lambda} \leq \frac{\lambda^2 a_1^2 + \frac{b_1^2}{\lambda^2}}{2}$$

und damit

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \leq \frac{\lambda^2}{2}(a_1^2 + \ldots + a_n^2) + \frac{1}{2\lambda^2}(b_1^2 + \ldots + b_n^2).$$

Dies ist zwar wie zuvor nach AM-GM immer noch größer (und nicht kleiner) als die andere Seite, aber wir haben noch ein Ass im Ärmel: Wir können nämlich $\lambda^2 = \sqrt{\frac{b_1^2+\ldots+b_n^2}{a_1^2+\ldots+a_n^2}}$ wählen und damit die beiden Terme rechts exakt gleich machen, und ihre Summe damit zu $\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}$ wie behauptet!

Eine Idee, die man aus diesem Beweis mitnehmen kann, ist, dass es manchmal klug ist, einen (oder mehrere Parameter) wie z.B. Gewichte zunächst unbestimmt zu lassen und erst am Ende des Beweises so zu wählen, dass (hoffentlich) alles aufgeht.

Können wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf mehr als zwei Folgen verallgemeinern? Für vier Folgen ist das leicht: Sind $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n$ vier Folgen, dann gilt

$$(a_1b_1c_1d_1 + \ldots + a_nb_nc_nd_n)^4 \leq ((a_1b_1)^2 + \ldots + (a_nb_n)^2)((c_1d_1)^2 + \ldots + (c_nd_n)^2)$$

nach Cauchy-Schwarz und durch nochmalige Anwendung der CSU auf die beiden Faktoren folgt

$$(a_1b_1c_1d_1 + \ldots + a_nb_nc_nd_n)^4 \leq (a_1^4 + \ldots + a_n^4)(b_1^4 + \ldots + b_n^4)(c_1^4 + \ldots + c_n^4)(d_1^4 + \ldots + d_n^4).$$

Wie ist es mit drei Folgen? Hier können wir den Trick aus dem letzten Kapitel anwenden und künstlich eine vierte Folge definieren: Setzen wir $d_i = \sqrt[3]{a_ib_ic_i}$, dann folgt aus dem eben gezeigten

$$(d_1^4 + \ldots + d_n^4)^4 \leq (a_1^4 + \ldots + a_n^4)(b_1^4 + \ldots + b_n^4)(c_1^4 + \ldots + c_n^4)(d_1^4 + \ldots + d_n^4).$$

Hier können wir einen Faktor kürzen und erhalten

$$((a_1b_1c_1)^{4/3} + \ldots + (a_nb_nc_n)^{4/3})^3 \leq (a_1^4 + \ldots + a_n^4)(b_1^4 + \ldots + b_n^4)(c_1^4 + \ldots + c_n^4).$$

Ersetzen wir hier jeweils $a_i^{4/3}$ durch a_i, $b_i^{4/3}$ durch b_i sowie $c_i^{4/3}$ durch c_i, folgt tatsächlich

$$(a_1b_1c_1 + \ldots + a_nb_nc_n)^3 \leq (a_1^3 + \ldots + a_n^3)(b_1^3 + \ldots + b_n^3)(c_1^3 + \ldots + c_n^3).$$

Mit dem gleichen Trick der *Vorwärts-Rückwärts-Induktion* wie im Beweis von AM-GM lässt sich dann auch die analoge Aussage für beliebig viele Variablen beweisen:

Satz (CSU für beliebig viele Folgen): Sind k Folgen reeller Zahlen $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$,...,$(z_1, \ldots, z_n)$ gegeben, dann gilt

$$(a_1 \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot z_1 + \ldots + a_n \cdot b_n \cdot \ldots \cdot z_n)^k \leq (a_1^k + \ldots + a_n^k) \cdot (b_1^k + \ldots + b_n^k) \cdot \ldots \cdot (z_1^k + \ldots + z_n^k).$$

Durch die komplexe Notation sieht die Aussage etwas abstrakter aus, als sie eigentlich ist: Am besten ist es wohl, wenn man sich an die eigentliche Cauchy-Schwarz-Ungleichung erinnert und sich merkt, dass die „naheliegende Verallgemeinerung" für beliebig viele Folgen auch gilt.

Eine wichtige Anwendung dieser allgemeinen Ungleichung ist, dass wir nun wieder eine sehr konkrete und sehr wichtige Ungleichung für zwei Folgen erhalten, eine gewichtete Form der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

Satz (Hölder-Ungleichung): Sind p und q positive reelle Zahlen mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und sind $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ zwei Folgen positiver reeller Zahlen, dann gilt

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \leq (a_1^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Der Fall $p = q = 2$ entspricht natürlich genau der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Beweis der Hölder-Ungleichung: Da wir jede reelle Zahl beliebig durch rationale Zahlen approximieren können, genügt es den Fall zu betrachten, in dem p und q beide rational sind. Wegen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ können wir dann ganze Zahlen k und ℓ finden mit $\frac{1}{p} = \frac{k}{k+\ell}$ und $\frac{1}{q} = \frac{\ell}{k+\ell}$. Wir müssen dann

$$(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^{k+\ell} \leq \left(a_1^{\frac{k+\ell}{k}} + \ldots + a_n^{\frac{k+\ell}{k}}\right) \cdot \left(b_1^{\frac{k+\ell}{\ell}} + \ldots + b_n^{\frac{k+\ell}{\ell}}\right)$$

zeigen. Dies folgt aber sofort durch Anwendung der verallgemeinerten Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $k + \ell$ Folgen, wobei wir k-mal die Folge $a_i^{1/k}$ und ℓ-mal die Folge $b_i^{1/\ell}$ wählen. $\square$

Der interessierten Leserin sei es ans Herz gelegt, sich eine Verallgemeinerung der Hölder-Ungleichung auf beliebig viele Folgen zu überlegen!

Die Hölder-Ungleichung kann man ähnlich wie die CDU/T2's Lemma nutzen, um Summen von Brüchen abzuschätzen. Wir demonstrieren dies anhand der zweiten Aufgabe der IMO 2001:

Aufgabe: Gegeben seien positive reelle Zahlen a, b, c. Zeige:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Lösung: Nach Hölder mit Gewichten $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$ ist

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}}\right)^{2/3} \cdot (a^3 + 8abc + b^3 + 8abc + c^3 + 8abc)^{1/3} \geq a + b + c.$$

Die Kunst war, die Folgen (und die Gewichte) so zu wählen, dass alle Wurzeln verschwinden! Es genügt nun,

$$(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

zu beweisen, was sofort nach Ausmultiplizieren und Muirhead (oder AM-GM) folgt. $\square$

2.2 Die allgemeine Mittelungleichung

Wir kommen nun zur bereits zu Beginn versprochenen allgemeinen Mittelungleichung und werden gleich feststellen, dass wir mit der Hölder-Ungleichung inzwischen auch das passende Werkzeug zur Hand haben, um diese zu beweisen.

Für eine beliebige reelle Zahl $r \neq 0$ und positive reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ definieren wir dabei zunächst das *r-te Potenzmittel* dieser Zahlen als

$$M_r(a_1, \ldots, a_n) := \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Besonders wichtige Beispiele sind das bereits bekannte arithmetische Mittel ($r = 1$), das *quadratische Mittel* ($r = 2$) und das *harmonische Mittel* ($r = -1$)

$$QM(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}, \quad HM(a_1, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Wir haben $r \neq 0$ angenommen und tatsächlich ist der Ausdruck M_r für $r = 0$ nicht definiert. Aus Gründen, die gleich klarer werden, definieren wir M_0 als das geometrische Mittel der Zahlen. Damit können wir nun endlich zur allgemeinen Mittelungleichung kommen:

Satz (Allgemeine Mittelungleichung): Sind r und s reelle Zahlen mit $r \geq s$ und sind $a_1, \ldots, a_n$ beliebige reelle Zahlen, dann gilt

$$M_r(a_1, \ldots, a_n) \geq M_s(a_1, \ldots, a_n).$$

Insbesondere gilt also (wegen $2 \geq 1 \geq 0 \geq -1$) in unseren Spezialfällen

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM.$$

Beweis der allgemeinen Mittelungleichung: Wir stellen zunächst einige Vorüberlegungen an:

- Ist $M_r \geq M_s$ für beliebige a_i bekannt, dann auch $M_{\lambda r} \geq M_{\lambda s}$ für beliebige $\lambda > 0$ (und umgekehrt), denn wir können $M_r \geq M_s$ auf die Folge a_i^λ anwenden. Weiter folgt auch $M_{-r} \leq M_{-s}$, denn wir können $M_r \geq M_s$ auf die Folge der Kehrwerte anwenden.

- Da wir $M_1 \geq M_0$ bereits bewiesen haben (AM-GM!), folgt insbesondere sofort $M_r \geq M_0$ für alle $r \geq 0$ und $M_s \leq M_0$ für alle $s \leq 0$ und damit sofort $M_r \geq M_s$, falls $r \geq 0 \geq s$ gilt.

- Es bleibt also noch der Fall zu untersuchen, in dem r und s beide positiv sind. Wegen der Skalierungsinvarianz genügt es dann $M_r \geq M_1$ für alle $r > 1$ zu beweisen.

Wir müssen also noch

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq \left(\frac{a_1^r + \ldots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$$

für $r > 1$ beweisen. Dies ist aber äquivalent zu

$$a_1 + \ldots + a_n \leq (a_1^r + \ldots + a_n^r)^{\frac{1}{r}} n^{1-\frac{1}{r}},$$

was sofort aus der Hölder-Ungleichung angewandt auf die Folgen $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(1, \ldots, 1)$ mit den Gewichten r und $\frac{r}{r-1}$ folgt. $\square$

Als Anwendung der Mittelungleichungen lösen wir eine Aufgabe aus der Landesrunde 2015:

Aufgabe: Zeige: Sind x, y, z nichtnegative reelle Zahlen mit $x + y + z = 1$, so gilt

$$\sqrt[3]{x - x^3} + \sqrt[3]{y - y^3} + \sqrt[3]{z - z^3} \leq 2.$$

Lösung: Nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und kubischem Mittel ($r = 3$) (oder äquivalent zwischen dem $\frac{1}{3}$-ten Mittel und dem arithmetischen Mittel) ist

$$\frac{\sqrt[3]{x - x^3} + \sqrt[3]{y - y^3} + \sqrt[3]{z - z^3}}{3} \leq \left(\frac{x - x^3 + y - y^3 + z - z^3}{3}\right)^{1/3}.$$

Es genügt also $x - x^3 + y - y^3 + z - z^3 \leq \frac{8}{9}$ zu beweisen oder (wegen der Nebenbedingung) äquivalent $x^3 + y^3 + z^3 \geq \frac{1}{9}$. Dies folgt aber wiederum aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und kubischem Mittel (und der Nebenbedingung) wegen

$$\sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3} = \frac{1}{3}. \qquad \square$$

2.3 Aufgaben

Die Aufgaben sind in etwa nach Schwierigkeit geordnet und mit den Inhalten des Briefes lösbar. *Herausforderung:* Löse möglichst viele der Aufgaben aus diesem und dem letzten Kapitel zusätzlich auch mit den Methoden des jeweils anderen Kapitels (oft gibt es mehrere Lösungen)!

Aufgabe 2.1: Gibt es eine endliche Menge reeller Zahlen, so dass die Summe der Zahlen gleich 2, die Summe ihrer Quadrate gleich 3, die Summe ihrer Kuben gleich 4,... und die Summe ihrer neunten Potenzen gleich 10 ist?

Aufgabe 2.2: Gegeben sei eine natürliche Zahl n und positive reelle Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ mit

$$(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) \cdot \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}\right) < n^2 + 1.$$

Zeige: Für alle i, j, k mit $1 \leq i < j < k \leq n$ gibt es ein Dreieck mit den Seitenlängen t_i, t_j, t_k. *Zusatz:* Was ist der kleinstmögliche Ausdruck, durch den man $n^2 + 1$ ersetzen kann?

Aufgabe 2.3: Es seien a, b, c, d nichtnegative reelle Zahlen mit $a + b + c + d = 4$. Beweise:

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}.$$

Aufgabe 2.4: Die Mathematigerin hat einen quadratischen Kuchen gebacken, dessen Oberfläche durch Gitterlinien in 2022×2022 Quadrate unterteilt sind. In jedes dieser Quadrate möchte sie entweder eine Erdbeere oder ein Sahnehäubchen setzen. Für jede solche Belegung des Kuchens betrachten wir die Anzahl aller Tripel (S, E, S'), die aus einer Erdbeere E und zwei Sahnehäubchen S, S' bestehen, wobei sowohl S und E derselben Zeile als auch S' und E derselben Spalte angehören. Was ist der größtmögliche Wert dieser Anzahl, den die Mathematigerin durch geschickte Dekoration des Kuchens erreichen kann?

Aufgabe 2.5: Finde die kleinste reelle Zahl K, sodass für alle reellen Zahlen $x, y, z > 0$ gilt:

$$x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{x} \leq K\sqrt{(x + y)(y + z)(z + x)}$$

Aufgabe 2.6: Gegeben seien positive reelle Zahlen $a, b, c > 0$. Zeige

$$\frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}}{3} \leq \sqrt[3]{a \cdot \frac{a + b}{2} \cdot \frac{a + b + c}{3}}.$$

Zusatz: Kannst du dies auf beliebig viele Variablen verallgemeinern?

3 Die Ungleichung von Jensen und der Tangententrick

3.1 Die Jensensche Ungleichung

Oft begegnet man Aufgaben, in denen ein Ausdruck der Form $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$ für eine bestimmte Funktion f und Variablen $x_1, \ldots, x_n$ maximiert oder minimiert werden soll, wobei die Variablen meistens noch zusätzliche Bedingungen erfüllen sollen.
Die Jensen-Ungleichung beschäftigt sich mit solchen Ausdrücken, wenn diese Zusatzbedingung von der Form ist, dass die Summe der Variablen $x_1 + \cdots + x_n$ konstant ist und der Extremfall dann eintritt, wenn alle Variablen den gleichen Wert annehmen, also $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$. Die zu untersuchende Ungleichung ist dann von der Form

$$f(x_1) + \cdots + f(x_n) \geq n \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

oder umgekehrt (mit $\leq$), allerdings lässt sich dieser zweite Fall auf den ersten zurückführen, indem wir statt der (bisher noch unbestimmten Funktion f) die Funktion $-f$ betrachten.
Zum Beispiel ist die Aufgabe aus dem letzten Kapitel von dieser Form mit $f(x) = \sqrt[3]{x - x^3}$ (bzw. $f(x) = -\sqrt[3]{x - x^3}$).

Bisher haben wir noch nichts über die Funktion f gesagt, natürlich müssen wir aber in irgendeiner Form etwas über f voraussetzen, um solch eine Ungleichung zu beweisen.

In ihrer einfachsten Form sagt die Jensen-Ungleichung: Gilt die Ungleichung für zwei Variablen, dann gilt sie auch für eine beliebige Anzahl an Variablen. Und vielleicht könnt ihr sogar nach der Lektüre der letzten beiden Kapitel schon ahnen, wie man so etwas beweist! Zunächst aber müssen wir einige Begriffe einführen:

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (auch $I = \mathbb{R}$ ist erlaubt), dann nennen wir eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ *konvex* (genauer: *Jensen-konvex*), falls die Ungleichung

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

für alle $x, y \in I$ gilt. Gilt genau die umgekehrte Ungleichung für alle $x, y \in I$, dann nennen wir f *konkav.*

Es ist also f konkav genau dann, wenn $-f$ konvex ist. Aus diesem Grund werden wir uns im Folgenden meist auf den Fall beschränken, dass f konvex ist. Typischerweise erhält man dann die analogen Aussagen für konkaven Funktionen, in dem man alle Ungleichheitszeichen umdreht.

Konvexität hat eine schöne geometrische Interpretation: Auf der linken Seite steht der Mittelwert der Funktionswerte $f(x), f(y)$, auf der rechten Seite der Funktionswert am Mittelwert von x und y. Konvexität bedeutet also geometrisch, dass der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von zwei Punkten auf dem Graphen einer Funktion oberhalb (bzw. genauer: nicht unterhalb) des Graphen liegt.
Ist f eine „schöne“ Funktion (genauer gesagt: *stetig*), dann ist das äquivalent dazu, dass sogar die gesamte Verbindungsstrecke von zwei Punkten auf dem Graphen oberhalb (bzw. nicht unterhalb) des Graphen liegt (warum ist das zumindest intuitiv so?). Der Graph einer konvexen Funktion ist also wie eine (Normal-)Parabel nach unten gewölbt, eine konkave Funktion wie eine Wurzelfunktion nach oben.

Tatsächlich ist die eine Parabel beschreibende Funktion $f(x) = x^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ konvex, denn dies bedeutet $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, was äquivalent zu $2x^2 + 2y^2 \geq (x+y)^2$ und damit zu $(x-y)^2 \geq 0$ ist, also für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Satz (Jensen-Ungleichung:): Ist $f : I \to \mathbb{R}$ konvex und sind $x_1, \ldots, x_n \in I$ beliebig, dann gilt

$$\frac{f(x_1) + \ldots f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Dies ist natürlich genau die Ungleichung aus der Diskussion vom Beginn dieses Abschnitts. Noch einmal: Die Aussage ist per Definition (!), dass die Ungleichung genau dann für alle $x_1, \ldots, x_n$ gilt, wenn sie für beliebige zwei Variablen $x_1, x_2 \in I$ gilt.

Intuitiv kann man so darüber nachdenken: Die Jensen-Ungleichung sagt, dass bei fester Summe der Variablen der Ausdruck $f(x_1) + \cdots + f(x_n)$ minimal wird, wenn alle Variablen gleich sind. Konvexität sagt, dass sie kleiner wird, wenn wir zwei beliebige Variablen auf ihren Mittelwert zusammenschieben. Natürlich können wir dies mit beliebigen zwei Variablen tun, dann mit zwei anderen usw. Auf diese Weise können wir die Variablen der Reihe nach immer näher aneinander schieben und die Summe der Funktionswerte in jedem Schritt kleiner machen, bis die Variablen irgendwann alle beliebig nah beieinander sind, also fast alle gleich.

Dies ist kein strenger Beweis, weil wir mit dem Schieben ja nie fertig werden (wir können zwar immer zwei Variablen exakt auf ihr Mittel schieben, aber nie alle gleichzeitig), aber es liefert eine gute Intuition, um über Ungleichungen mit konvexen Funktionen nachzudenken.

Beweis der Jensen-Ungleichung: Weniger überraschend verwenden wir Vorwärts-Rückwärts-Induktion! Ist die Ungleichung für n Variablen bekannt und sind $x_1, \ldots, x_{2n} \in I$ beliebig, dann folgt

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_{2n})}{2n} = \frac{\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} + \frac{f(x_{n+1})+\ldots+f(x_{2n})}{n}}{2} \geq \frac{f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) + f\left(\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)}{2}$$

$$\geq f\left(\frac{\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+\ldots+x_{2n}}{n}}{2}\right) = f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2n}}{2n}\right),$$

wobei wir zunächst die Ungleichungen für je n Variablen und dann die Ungleichung für zwei Variablen (also die Definition von Konvexität!) benutzt haben.

Aus der Ungleichung für n Variablen folgt also die für $2n$, damit haben wir die Ungleichung für $n = 4$, für $n = 8, n = 16, n = 32$ usw. bewiesen.

Nun der Rückwärtsteil: Ist die Ungleichung für n Variablen bekannt und sind $x_1, \ldots, x_{n-1} \in I$ beliebig, dann definieren wir $x_n = \frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}$. Dann ist

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) = f(x_n),$$

also $f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n) \geq nf(x_n)$, also $f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) \geq (n-1)f(x_n)$ und damit

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})}{n-1} \geq f(x_n) = f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right),$$

also genau die Behauptung für $n - 1$ Variablen.

Aus der Ungleichung für n Variablen folgt also die für $n - 1$ und damit für alle kleineren Variablenzahlen. Da wir die Ungleichung bereits für beliebig große Variablenzahlen kennen (Zweierpotenzen), folgt sie also für alle Variablenzahlen. $\square$

Zum Beispiel folgt aus der oben bewiesenen Konvexität von $f(x) = x^2$ nun sofort

$$\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^2,$$

was nach Ziehen der Wurzel genau die im letzten Kapitel bewiesene Ungleichung QM-AM zwischen quadratischem und arithmetischem Mittel ist!

Mit der Jensen-Ungleichung können wir nun auch die frühere geometrische Überlegung begründen, dass nicht nur der Mittelpunkt, sondern sogar die gesamte Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten oberhalb des Graphen liegt:

Satz (Gewichtete Jensen-Ungleichung): Ist $f : I \to \mathbb{R}$ konvex, sind $x, y \in I$ und ist $\lambda \in [0, 1]$ rational, dann gilt

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geq f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right).$$

Ist f stetig, dann gilt dies auch für beliebige reelle $\lambda \in [0, 1]$.

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ ist dies genau die Definition von Konvexität!

Beweis: Der zweite Teil folgt sofort aus dem ersten (zumindest mit der richtigen Definition von Stetigkeit), da man reelle Zahlen durch rationale beliebig approximieren kann. Für den ersten Teil schreiben wir $\lambda = \frac{p}{p+q}$. Dann wollen wir

$$\frac{pf(x) + qf(y)}{p+q} \geq f\left(\frac{px + qy}{p+q}\right)$$

zeigen und dies folgt aus der Jensen-Ungleichung angewandt auf p-mal x und q-mal y. $\square$

Natürlich lässt sich auch die gewichtete Jensen-Ungleichung wieder auf beliebig viele Variablen verallgemeinern (wie genau?).

Die allgemeine Mittelungleichung $M_r \geq M_1$ aus dem letzten Kapitel ist äquivalent zur Konvexität der Funktion $f(x) = x^r$ auf $I = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Können wir damit einen neuen Beweis der Mittel-Ungleichungen finden? Nicht wirklich, denn das bisher Bewiesene sagt uns nur: Können wir eine der Mittel-Ungleichungen für zwei Variablen beweisen, dann folgt sie auch für beliebig viele. Genau so haben wir ja auch AM-GM bewiesen! Hier war der Fall $n = 2$ sehr einfach und auch für QM-AM haben wir es oben direkt nachgerechnet, aber für die allgemeinen Potenzmittel ist der Fall $n = 2$ leider nicht wirklich einfacher als der von beliebig vielen Variablen.

Auch in der letzten Aufgabe aus dem zweiten Kapitel würde es genügen, die Konkavität der Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x - x^3}$ auf $I = [0, 1]$ zu zeigen.Dies würde allerdings bedeuten, dass wir eine allgemeine Ungleichung für den Ausdruck $\sqrt[3]{x - x^3} + \sqrt[3]{y - y^3}$ beweisen müssten, was nicht wirklich einfacher aussieht als die eigentliche Aufgabe!
Die Jensen-Ungleichung in ihrer bisherigen Form ist also einfach eine Verallgemeinerung des Prinzips der Vorwärts-Rückwärts-Induktion. Sie wird erst dann zu einem wirklich mächtigen Werkzeug, wenn wir eine einfachere Methode finden, Konvexität einer Funktion nachzuweisen. Dieses Kriterium liefert uns die Analysis:

Satz: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, dann ist f genau dann konvex, wenn die zweite Ableitung $f''(x)$ auf ganz I nichtnegativ ist.

Wer also weiß, wie man die Ableitung einer Funktion bestimmt, findet hier ein sehr handliches Kriterium, um Konvexität zu überprüfen. Zum Beispiel folgt die Konvexität von $f(x) = x^r$ (und damit die allgemeine Mittelungleichung!) sofort aus $f''(x) = r(r-1)x^{r-2} \geq 0$ für $r \geq 1$ und $x \geq 0$. Die meisten Funktionen, denen man in der Natur begegnet, sind zweimal differenzierbar, es ist aber wichtig sich daran zu erinnern, dass die Aussage über die zweite Ableitung nicht die Definition von Konvexität ist, denn sonst könnten wir nicht sagen, dass z.B. die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ konvex ist (warum ist sie es?).

„Beweis“: Da wir hier kein Wissen über Analysis voraussetzen, können wir den Satz nicht wirklich beweisen, wollen ihn aber wenigstens anschaulich begründen: Die Ableitung einer Funktion misst ihre Steigung, die zweite Ableitung also die Steigung der Steigung. Die Bedingung $f''(x) \geq 0$ sagt also, dass die Steigung von f monoton wächst. Mit der Substitution $x = y + 2d, z = y + d$ für $x \geq y$ ist die Jensen-Ungleichung äquivalent zu $\frac{f(z+d)-f(z)}{d} \geq \frac{f(z)-f(z-d)}{d}$. Die linke Seite ist aber die durchschnittliche Steigung auf dem Intervall $[z, z+d]$, die rechte auf dem Intervall $[z-d, z]$. Nun ist zumindest intuitiv klar, warum die Jensen-Ungleichung äquivalent zur Monotonie der Steigung f' ist (und mit den richtigen Hilfsmitteln aus der Analysis lässt es sich auf diesem Weg auch sehr leicht formal begründen). □

Wer will, kann nun voll losrechnen: Für $f(x) = \sqrt[3]{x - x^3}$ ist etwa

$$f''(x) = -\frac{6x^2 + 2}{9(x - x^3)^{5/3}} \leq 0$$

für alle $x \in [0, 1]$, d.h. f ist tatsächlich konkav und für $x, y, z \geq 0$ mit $x + y + z = 1$ folgt

$$f(x)+f(y)+f(z) \leq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 2. \qquad \square$$

Ist die volle Konvexität bzw. Konkavität einer solchen Funktion nachzuweisen, ist eine solche Rechnung möglicherweise tatsächlich der einfachste Weg. Wie aber bereits oben bemerkt, ist die in der Aufgabe zu zeigende Aussage (der Spezialfall $x + y + z = 1$) nicht äquivalent zur Konkavität und dies erlaubt uns, eine wesentlich elegantere Lösung der Aufgabe zu finden, die dennoch (im Gegensatz zur Lösung aus dem letzten Kapitel) auf einer geometrischen Überlegung über den Graphen der Funktion beruht.

3.2 Die Tangentenmethode

Hier ist eine Meteoriten-Lösung zur gleichen Aufgabe:

Aufgabe: Zeige: Sind x, y, z nichtnegative reelle Zahlen mit $x + y + z = 1$, so gilt

$$\sqrt[3]{x - x^3} + \sqrt[3]{y - y^3} + \sqrt[3]{z - z^3} \leq 2.$$

Lösung: Wir zeigen die Hilfsungleichung $\sqrt[3]{x - x^3} \leq \frac{1+x}{2}$ für alle $x \in [0, 1]$. Dann folgt die Behauptung sofort wegen

$$\sqrt[3]{x - x^3} + \sqrt[3]{y - y^3} + \sqrt[3]{z - z^3} \leq \frac{1+x}{2} + \frac{1+y}{2} + \frac{1+z}{2} = \frac{3+x+y+z}{2} = 2.$$

Die Hilfsungleichung folgt nun z.B., indem wir auf beiden Seiten die dritte Potenz bilden und mit 8 multiplizieren. Dann müssen wir noch $8x - 8x^3 \leq (1 + x)^3$ beweisen oder äquivalent

$$0 \leq 1 - 5x + 3x^2 + 9x^3 = (1 - 3x)(1 - 2x - 3x^2) = (1 - 3x)^2(1 + x),$$

was tatsächlich sogar für alle $x \geq -1$ stimmt. Hier war es nützlich zu wissen, dass $x = \frac{1}{3}$ der Gleichheitsfall sein muss, und zwar sogar ein doppelter (sonst würde die Funktion bei $\frac{1}{3}$ ihr Vorzeichen ändern), sodass wir $1 - 3x$ zweimal ausklammern konnten. □

Alternativ kann man übrigens auch AM-GM verwenden:

$$\sqrt[3]{x-x^3} = \sqrt[3]{x(1-x)(1+x)} = \sqrt[3]{2x\cdot(1-x)\cdot\frac{1+x}{2}} \le \frac{2x+(1-x)+\frac{1+x}{2}}{3} = \frac{1+x}{2}.$$

Hier war entscheidend, dass wir nach der Faktorisierung im ersten Schritt nicht direkt AM-GM verwendet haben, denn für $x=\frac{1}{3}$ sind die Faktoren x, $1-x$ und $1+x$ nicht gleich groß, der Gleichheitsfall kann also nicht erhalten bleiben! Stattdessen haben wir die Faktoren im zweiten Schritt so geschickt gewichtet, dass sie zumindest bei $x=\frac{1}{3}$ alle gleich groß sind. $\square$

Wie auch immer man die Hilfsungleichung beweist: Es ist sicherlich deutlich leichter als die ursprüngliche Aufgabe, da es sich um einen Ausdruck in nur einer Variablen handelt! Die entscheidende Frage ist dagegen: Wie kommt man auf diese Hilfsungleichung?
Die Antwort: Die Funktion $\frac{1+x}{2}$ ist die Gleichung der Tangenten an die Funktion $f(x)=\sqrt[3]{x-x^3}$ am Punkt $x=\frac{1}{3}$.

Tangentenmethode: Ist die Ungleichung

$$\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n} \ge f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)$$

für alle $x_1,\ldots,x_n$ mit fester Summe $x_1+\cdots+x_n=n\cdot s$ zu zeigen, dann genügt es, $f(t)\ge m(t-s)+f(s)$ für alle t (und ein festes $m\in\mathbb{R}$) zu beweisen, denn dann folgt

$$f(x_1)+\cdots+f(x_n) \ge m(x_1-s)+f(s)+\cdots+m(x_n-s)+f(s) = nf(s).$$

Wir haben absichtlich darauf verzichtet, den Begriff „Tangente“ in der Aussage zu verwenden. Tatsächlich kann die Ungleichung $f(t)\ge m(t-s)+f(s)$ nur dann für alle t stimmen, wenn $m(t-s)+f(s)$ die Gleichung der Tangenten bei $t=s$ ist, denn sonst würde die Gerade bei $t=s$ den Graphen von f schneiden und die Ungleichung wäre auf einer Seite verletzt. In der Praxis muss man also mit der Tangenten arbeiten. Da diese Eigenschaft allerdings später nicht weiter verwendet wird, kann man die Lösung wie oben als Meteoriten-Lösung aufschreiben, ohne zu begründen, wie man auf die Hilfsungleichung gekommen ist (und insbesondere ohne die Berechnung der Ableitung mit aufzuschreiben)!

In unserem Fall oben mit $f(x)=\sqrt[3]{x-x^3}$ ist $f'(x)=\frac{1-3x^2}{3(x-x^3)^{2/3}}$, also $m=f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$ und damit die Tangentengleichung $\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}=\frac{t+1}{2}$.

Die Tangentenmethode funktioniert also immer dann, wenn die Tangente am zu untersuchenden Punkt im relevanten Intervall unterhalb des Funktionsgraphen liegt. Nun ist f genau dann konvex, wenn *jede* Tangente komplett unterhalb des Funktionsgraphen liegt (warum?). Man kann die Tangentenmethode also wie oben als Ersatz für die Jensen-Ungleichung verwenden, selbst wenn die Funktion konvex ist (z.B. weil die zweite Ableitung sehr unschön ist). Sie funktioniert aber auch in Situationen, wo f nicht konvex ist, denn sie benutzt nur eine schwächere Aussage über die Funktion, nämlich über eine spezielle Tangente. Die große Stärke dieser Methode liegt darin, dass sie eine Ungleichung *in mehreren Variablen* auf eine *in einer Variablen* reduziert. Zusätzlich kennen wir hier einen Gleichheitsfall und können typischerweise bereits das Quadrat des entsprechenden Linearfaktors ausklammern und damit die Behauptung zusätzlich vereinfachen.

Die Idee der Abschätzung eines komplizierten Ausdrucks gegen eine lineare Funktion lässt sich auch kreativ in anderen Situationen einsetzen, wie die folgende Variante einer Aufgabe vom Baltic Way 2006 zeigt:

Aufgabe: Seien $a_1, \dots, a_{32}$ reelle Zahlen aus dem Intervall $[-7, 9]$ mit $a_1 + \cdots + a_{32} = 0$. Zeige:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{32}^2 \leq 2016.$$

Lösung: Mit etwas Probieren findet man schnell heraus, dass der Gleichheitsfall eintritt, wenn alle Variablen am Rand liegen, nämlich 18 bei -7 und 14 bei 9 (tatsächlich werden wir im nächsten Abschnitt sehen, dass dieses Phänomen beim Maximieren eines solchen Ausdrucks mit einer konvexen Funktion wie x^2 immer passiert). Das ist allerdings genau das gegenteilige Phänomen, von dem, welches die Jensen-Ungleichung bzw. die Tangentenmethode versucht zu beschreiben (Gleichheitsfall, wenn alle Variablen gleich).
Dennoch führt folgende Überlegung zum Ziel: Für $-7 \leq t \leq 9$ ist $(t + 7)(9 - t) \geq 0$ und damit $t^2 \leq 2t + 63$, also ergibt sich

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{32}^2 \leq (2a_1 + 63) + \cdots + (2a_{32} + 63) = 2016$$

wie behauptet. Geometrisch sagt die Ungleichung $t^2 \leq 2t + 63$, dass (gerade weil $x \mapsto x^2$ konvex ist!) die Gerade durch die Punkte $(-7, 49)$ und $(9, 81)$ im Intervall $[-7, 9]$ (und nur dort) oberhalb des Graphen liegt. $\square$

3.3 Aufgaben

Die Aufgaben sind in etwa nach Schwierigkeit geordnet und mit den Inhalten des Briefes lösbar. Auch hier gilt: Suche jeweils nach möglichst vielen verschiedenen Lösungen, die vielleicht auch die Methoden aus den anderen Kapiteln benutzen!

Aufgabe 3.1: Es seien $a_1, a_2, \dots, a_{22}$ positive ganze Zahlen mit der Summe 59. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{a_1}{a_1 + 1} + \frac{a_2}{a_2 + 1} + \cdots + \frac{a_{22}}{a_{22} + 1} < 16.$$

Aufgabe 3.2: Zeige für alle nichtnegativen reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 1$ die Ungleichung

$$1 \leq \frac{x}{1 - yz} + \frac{y}{1 - zx} + \frac{z}{1 - xy} \leq \frac{9}{8}.$$

Aufgabe 3.3: Gegeben seien positive reelle Zahlen a, b, c mit $\min(ab, bc, ca) \geq 1$. Zeige

$$\sqrt[3]{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} \leq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2 + 1.$$

Aufgabe 3.4: Es seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$. Zeige:

$$\frac{1}{(2a + b + c)^2} + \frac{1}{(a + 2b + c)^2} + \frac{1}{(a + b + 2c)^2} \leq \frac{3}{16}.$$

Aufgabe 3.5: Zeige für alle nichtnegativen reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 9$ die Ungleichung

$$\frac{1}{51 + x^2} + \frac{1}{51 + y^2} + \frac{1}{51 + z^2} \leq \frac{1}{20}.$$

4 Der letzte Schliff

In diesem letzten Kapitel lernen wir noch einige fortgeschrittene Tricks kennen.

4.1 Schieben und Karamata

Die Jensen-Ungleichung sagt, dass für eine konvexe Funktion f der Ausdruck $f(x_1)+\cdots+f(x_n)$ bei konstanter Summe $x_1+\cdots+x_n$ dann minimal wird, wenn alle Variablen den gleichen Wert haben. Tatsächlich gilt aber sogar viel mehr: Der Ausdruck wird immer dann kleiner (bzw. nicht größer), wenn wir zwei Variablen näher aneinander schieben und dann größer (bzw. nicht kleiner), wenn wir sie auseinanderschieben:

Satz (Schieben): Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und konvex und sind $x_1 < y_1 < y_2 < x_2$ Elemente von I mit $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, dann gilt

$$f(x_1) + f(x_2) \geq f(y_1) + f(y_2).$$

Beweis: Dies folgt sofort aus der gewichteten Jensen-Ungleichung: Mit $\lambda = \frac{x_2-y_1}{x_2-x_1}$ folgt

$$\frac{x_2 - y_1}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{y_1 - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \geq f(y_1).$$

Wiederholen wir das gleiche mit y_2 statt y_1 und addieren die beiden Ungleichungen, folgt die Behauptung unter Ausnutzung von $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$. $\square$

Wer sich noch an das erste Kapitel erinnert, wird sofort erkennen, dass die Voraussetzungen hier äquivalent sind zu $(x_1.x_2) \succ (y_1, y_2)$. Tatsächlich folgt nun ähnlich wie im Beweis der Muirhead-Ungleichung leicht eine analoge Ungleichung für beliebige n-Tupel:

Satz (Karamata-Ungleichung): Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, konvex und sind $x_1 > \cdots > x_n$ und $y_1 > \cdots > y_n$ Elemente aus I mit $(x_1, \ldots, x_n) \succ (y_1, \ldots, y_n)$, dann gilt

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n).$$

Beweis: Wir verwenden Induktion über n, wobei der Fall $n = 2$ genau der Satz von oben ist. Sei nun $n \geq 3$. Gibt es einen Index mit $x_k = y_k$, so können wir diesen entfernen und die Induktionsvoraussetzung verwenden. Sonst gibt es einen Index k mit $x_1 > y_1, \ldots, x_k > y_k$, aber $x_{k+1} < y_{k+1}$, also $x_k > y_k \geq y_{k+1} > x_{k+1}$. Sei $d = \min(x_k - y_k, y_{k+1} - x_{k+1})$ die kleinere der beiden Differenzen. Ersetzen wir nun $(y_1, \ldots, y_n)$ durch das Tupel $(y_1, \ldots, y_{k-1}.y_k + d, y_{k+1} - d, y_{k+2}, \ldots, y_n)$, so liegt dieses bzgl. $\succ$ zwischen den beiden ursprünglichen Tupeln und hat nach Konstruktion mit beiden mindestens einen Eintrag gemeinsam, die entsprechenden Ungleichungen folgen also aus der Induktionsvoraussetzung und dann auch die Behauptung. $\square$

Die Karamata-Ungleichung ist sehr allgemein, sie enthält z.B. die Jensen-Ungleichung als Spezialfall (warum?). Am nützlichsten ist aber meist der Fall $n = 2$, den wir oben zuerst bewiesen hatten. Zur Demonstration lösen wir noch einmal die Aufgabe aus dem vorigen Kapitel:

Aufgabe: Seien $a_1, \ldots, a_{32}$ reelle Zahlen aus dem Intervall $[-7, 9]$ mit $a_1 + \cdots + a_{32} = 0$. Zeige:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{32}^2 \leq 2016.$$

Lösung: Die Funktion $f(x) = x^2$ ist konvex, das wissen wir schon. Wir betrachten ein Tupel $(a_1, \dots, a_{32})$, welches die Bedingungen erfüllt und für welches der Ausdruck $a_1^2 + \cdots + a_{32}^2$ maximal wird.
Gäbe es zwei Indizes $i \neq j$ mit $-7 < a_i < a_j < 9$, dann könnten wir diese durch $a_i - \varepsilon$ und $a_j + \varepsilon$ ersetzen, was für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ weiterhin erlaubt wäre und auch die Summenbedingung nicht verletzen würde. Nach Karamata würde der Ausdruck dabei aber größer werden, was der Maximalitätsannahme widerspricht!
Also müssen alle bis auf höchstens eine Variable am Rand, d.h. bei -7 oder bei 9 liegen. Wären mehr als 18 Variablen bei -7, dann wäre die Summe insgesamt negativ, analog können nicht mehr als 14 Variablen bei 9 liegen. Da es insgesamt 32 Variablen sind, muss aber in einem der Fälle Gleichheit gelten und dann nach der gleichen Abschätzung noch einmal auch im anderen, d.h. es müssen genau 18 bei -7 und genau 14 bei 9 liegen, der Maximalwert ist also tatsächlich exakt $18 \cdot 7^2 + 14 \cdot 9^2 = 2016$. □

In diesem Beweis wurde eine kleine Subtilität unterschlagen, die Existenz eines Maximums! Diese lässt sich unter recht allgemeinen Bedingungen aus dem *Satz von Bolzano-Weierstraß* folgern. Dazu wird lediglich benötigt, dass die Funktion *stetig* ist (was in der Praxis eigentlich immer erfüllt ist, z.B. sind alle Polynome oder rationalen Funktionen stetig) und dass der Definitionsbereich der Funktion *kompakt* ist, d.h. *abgeschlossen* und *beschränkt*. „Abgeschlossen“ bedeutet im Wesentlichen, dass der Rand in der Menge enthalten ist, sodass die Funktion nicht zum Rand hin beliebig groß werden kann. Z.B. ist $[0, 1]$ oder $\mathbb{R}$ abgeschlossen, aber $(0, 1]$ oder $\mathbb{Q}$ nicht. „Beschränkt“ bedeutet einfach, dass in der Menge keine der Variablen beliebig groß oder beliebig klein werden kann, z.B. ist $(0, 1)$ oder $[0, 1]$ beschränkt, aber $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$ nicht.
Auf mehr technische Details können wir hier nicht eingehen, aber es hilft sicherlich, sich zumindest intuitiv davon zu überzeugen, dass dies die richtigen Voraussetzungen für einen solchen Satz sind. Der Satz von Bolzano-Weierstraß darf in der Olympiade zitiert werden. Schließlich sei noch einmal betont, dass der Satz natürlich nichts über die Eindeutigkeit eines Maximums aussagt!

Wir wollen nun noch an einem weiteren Beispiel aus einer rumänischen Auswahlklausur von 1999 sehen, wie man mit der Schiebe-Technik Aufgaben mit Funktionen behandeln kann, die in einem bestimmten Bereich konvex und in einem anderen Bereich konkav sind.

Aufgabe: Seien $x_1, \dots, x_n$ positive reelle Zahlen mit $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Zeige:

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1.$$

Lösung: Zunächst haben wir es hier mit einer Bedingung zu tun, bei der das Produkt und nicht die Summe der Variablen konstant ist. Dies lässt sich aber leicht über die Substitution $x_i = e^{y_i}$ beheben, dann ist $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0$ (die Basis e ist hier zunächst nicht entscheidend, macht aber die folgenden Rechnungen etwas einfacher). Setzen wir $f(y) = \frac{1}{n-1+e^y}$, so müssen wir $f(y_1) + \cdots + f(y_n) \leq 1 = nf(0)$ zeigen. Es ist $f''(y) = \frac{e^y(e^y-2022)}{(e^y+2022)^3}$ genau dann positiv, wenn $e^y > 2022$ ist. Mit $y_0 = \log(2022)$ ist die Funktion f also für $y \geq y_0$ konvex und für $y \leq y_0$ konkav. Der Definitionsbereich der (stetigen) Funktion ist nun auch wieder abgeschlossen, allerdings nicht kompakt, da die y_i nicht beschränkt sein müssen. Hier können wir einen kleinen Trick verwenden: Für ein beliebiges $C > 0$ beweisen wir die Ungleichung im Fall, dass alle $y_i \geq -C$ sind.

Dann sind wegen der Summenbedingung die y_i auch gleichzeitig nach oben beschränkt und der Definitionsbereich ist kompakt, d.h. es gibt ein Maximum. Gäbe es bei diesem Maximum zwei positive Variablen, könnten wir diese aufgrund der Konvexität auseinanderschieben und erhielten einen größeren Funktionswert, Widerspruch! Gäbe es zwei verschiedene Variablenwerte ≤ 0, könnten wir diese zusammenschieben und erhielten einen größeren Funktionswert, Widerspruch! (Hier ist entscheidend, dass beim Zusammenschieben die Bedingung $y_i \geq -C$ erhalten bleibt!) Es bleibt also der Fall, in dem $n-1$ Variablen ≤ 0 und gleich sind.
Es genügt somit, die ursprüngliche Ungleichung im Fall $x_1 = \cdots = x_{n-1} \leq 1$ zu beweisen, dies sei dem Leser als lehrreiche Übungsaufgabe überlassen. Entscheidend ist, dass wir wegen der Nebenbedingung nun alles durch eine Variable ausdrücken können! □

Die hier verwendete Technik lässt sich direkt verallgemeinern:

Satz (RCF/LCF): Ist f auf $x \geq x_0$ konvex und auf $x \leq x_0$ konkav (eine solche Funktion heißt rechtskonvex) oder umgekehrt (linkskonvex), so wird $f(x_1) + \cdots + f(x_n)$ bei konstanter Summe $x_1 + \cdots + x_n$ dann maximal, wenn $n-1$ der Variablen gleich sind.

4.2 Mixing Variables

Wir lernen nun noch eine Variante des Schiebe-Tricks kennen, die wieder (wie die Jensen-Ungleichung ganz zu Beginn) ganz ohne Berechnung von Ableitungen auskommt. Dazu zeigen wir noch eine weitere Lösung der rumänischen Aufgabe von eben:

Aufgabe: Seien $x_1, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen mit $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Zeige:

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1.$$

Lösung: Wie oben dürfen wir annehmen, dass wir an einer Stelle sind, wo ein Maximum angenommen wird. Wir untersuchen nun, was passiert, wenn wir x_1 und x_2 beide durch ihr geometrisches Mittel ersetzen (sodass die Produktbedingung erhalten bleibt!). Dazu schreiben wir $x_1 = a^2$ und $x_2 = b^2$. Dann gilt

$$\frac{1}{n-1+a^2} + \frac{1}{n-1+b^2} \leq \frac{2}{n-1+ab}$$

nach Ausmultiplizieren und Vereinfachen genau dann, wenn $ab(a-b)^2 \leq (n-1)(a-b)^2$ gilt. Ist also $x_1 \neq x_2$ und $x_1 x_2 \leq (n-1)^2$, so wird der Ausdruck größer, wenn wir x_1 und x_2 durch ihr geometrisches Mittel ersetzen, Widerspruch zur Maximalität! Es müssen also am Maximum je zwei Variablen gleich sein, es sei denn ihr Produkt ist größer als $(n-1)^2$. Wären aber zwei Variablen größer als $n-1$, dann wäre der Ausdruck trivial kleiner als $(n-2) \cdot \frac{1}{n-1} + 2 \cdot \frac{1}{2(n-1)} = 1$, dies kann also nicht das Maximum sein. Folglich kann beim Maximum höchstens eine der Variablen größer als $n-1$ sein. Da die kleinste Variable sicherlich höchstens 1 ist, ist das Produkt je zwei der nichtgrößten Variablen somit höchstens $n-1$, also müssen alle bis auf die größte Variable gleich sein und der Rest der Lösung ist wie oben leicht. □

Auch diese Technik des „Variablen-Mischens“ hat also gewisse Einschränkungen, wenn wir bestimmte Variablen zusammenschieben wollen. Was zunächst wie eine Schwäche aussieht, stellt sich aber bei der folgenden Aufgabe aus der Bundesrunde 2015 als Stärke heraus:

Aufgabe: Man beweise, dass für alle $x, y, z > 0$ die Ungleichung

$$\frac{x+y+z}{3} + \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \geq 5\sqrt[3]{\frac{xyz}{16}}$$

erfüllt ist.

Lösung: Vor allem die Konstanten auf der rechten Seite sehen zunächst sehr merkwürdig aus und wir sehen direkt, dass $x = y = z$ hier kein Gleichheitsfall ist. Mit etwas Geschick (und einer Intuition, die man möglicherweise nach Lesen dieses Briefs entwickelt), findet man allerdings den Gleichheitsfall $(4, 4, 1)$ und aus Symmetriegründen natürlich auch $(4, 1, 4)$ und $(1, 4, 4)$. Dies zeigt auch sofort, dass Mittelungleichungen hier hoffnungslos sind, denn selbst bei einer Gewichtung der unterschiedlichen Variablen können wir niemals diese drei Gleichheitsfälle mit unterschiedlichen Variablen erhalten.
Die Form des Gleichheitsfalls motiviert aber, dennoch zu versuchen, zwei der Variablen zusammenzuschieben. Es bietet sich an, dies wieder multiplikativ, d.h. durch Ersetzen mit dem geometrischen Mittel zu machen, da dann die unappetitliche rechte Seite konstant bleibt. Schreiben wir also $x = a^2$ und $y = b^2$, so wollen wir untersuchen, was mit der linken Seite bei Ersetzen durch $(x, y) = (ab, ab)$ passiert. Weil die Ungleichung homogen ist, dürfen wir $z = 1$ annehmen. Die linke Seite wird dabei genau dann nicht größer, wenn die Ungleichung

$$\frac{a^2+b^2}{3} + \frac{3}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1} \geq \frac{2ab}{3} + \frac{3}{\frac{2}{ab}+1}$$

wahr ist. Nach Umformen ist dies äquivalent zu

$$(a-b)^2 \geq \frac{9ab}{ab+2} - \frac{9a^2b^2}{a^2b^2+a^2+b^2}.$$

Multiplikation mit den Nennern liefert das äquivalente

$$(a-b)^2(ab+2)(a^2b^2+a^2+b^2) \geq 9ab(a-b)^2.$$

Hier war es schlau, überall $(a-b)^2$ auszuklammern, da wir wissen, dass $a = b$ ein Gleichheitsfall dieser Ungleichung ist. Es bleibt somit $(ab+2)(a^2b^2+a^2+b^2) \geq 9ab$ zu untersuchen. Für $a, b \geq 1$ ist der erste Faktor sicherlich mindestens 3 und der zweite Faktor mindestens $3ab$ und die Ungleichung ist wahr. Wenn wir uns an die Normierung $z = 1$ erinnern, haben wir also gezeigt: Schieben wir die *größeren beiden* der drei Variablen zusammen, dann wird die linke Seite nicht größer. Es genügt somit, die Ungleichung in dem Fall zu beweisen, in dem die größeren beiden Variablen gleich sind!
Der Rest ist nun nicht mehr schwierig: Wegen der Homogenität dürfen wir $(x, y, z) = \left(4t, 4t, \frac{1}{t^2}\right)$ annehmen (nun natürlich nicht mehr gleichzeitig $z = 1$), dann müssen wir

$$\frac{8t+\frac{1}{t^2}}{3} + \frac{3}{\frac{1}{2t}+t^2} \geq 5$$

zeigen. Nach Multiplikation mit allen Nennern und Vereinfachen wird dies zu

$$0 \leq 16t^6 - 30t^5 + 28t^3 - 15t^2 + 1 = (t-1)^2(16t^4 + 2t^3 - 12t^2 + 2t + 1),$$

wobei wir benutzt haben, dass $t = 1$ ein Gleichheitsfall ist und somit $(t-1)^2$ mit Polynomdivision herausteilen konnten. Der Rest folgt nun leicht aus AM-GM wegen $2t^3 + 2t \geq 4t^2$ sowie $16t^4 + 1 \geq 8t^2$. $\square$

4.3 Die uvw-Methode

Zum Abschluss wollen wir noch eine sehr mächtige weitere Variante des Schiebe-Tricks für *symmetrische Ungleichungen* besprechen, die sogenannte *uvw-Methode*, auch wenn diese Bezeichnung durch unsere Notation zunächst etwas kryptisch bleiben wird.
Wir besprechen hier nur den Fall von Ungleichungen in drei Variablen, die gleichen Ideen funktionieren auch für mehr Variablen, sind aber dort deutlich weniger nützlich (überlege dir nach dem zweiten Lesen, warum das so ist!). Die Hauptdarsteller der uvw-Methode sind die drei sogenannten *elementarsymmetrischen Polynome*, die wir mit $s = x + y + z$, $\sigma = xy + yz + zx$ und $p = xyz$ bezeichnen.[1]
Für allgemeine Variablenzahlen kann man für $1 \leq i \leq k$ analog die elementarsymmetrischen Polynome $\sigma_k = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$ definieren, die vielleicht aus dem Satz von Vieta bekannt sind. Zum Beispiel ist σ_1 immer die Summe der Variablen und σ_n ihr Produkt. Für $n = 3$ ist $s = \sigma_1$, $\sigma = \sigma_2$ und $p = \sigma_3$. Die erste wichtige Tatsache über diese elementarsymmetrischen Polynome gilt allerdings für beliebig viele Variablen:

Satz (Fundamentalsatz über symmetrische Polynome): Ist ein Polynom in den Variablen $x_1, \dots, x_n$ symmetrisch, so lässt es sich auch als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen σ_i ausdrücken.

Zum Beispiel ist $x^2 + y^2 + z^2 = s^2 - 2\sigma$ und $x^3 + y^3 + z^3 = s^3 - 3s\sigma + 3p$ und $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 = s\sigma - 3p$. Der Beweis des Satzes ist nicht wirklich schwierig, aber wir verzichten hier aus Platzgründen darauf. In der Praxis wird der Satz ohnehin selten zitiert, viel wichtiger ist es oft, für ein konkretes symmetrisches Polynom die entsprechende Darstellung zu finden, und zwar am besten mit möglichst wenig Rechenaufwand. Dies ist eine Kunst, die man nur durch viel Übung lernen kann.
Mit der Transformation der Variablen von x, y, z zu s, σ, p stellt sich natürlich die Frage, inwiefern diese umkehrbar ist. Nach dem Satz von Vieta lassen sich die Zahlen x, y, z bis auf die Reihenfolge eindeutig als Nullstellen des Polynoms $T^3 - sT^2 + \sigma T - p$ rekonstruieren. Bezeichnen wir mit $\mathcal{P}$ die Menge der Tripel (s, σ, p) die aus Tripeln (x, y, z) mit $x, y, z \geq 0$ entstehen, so lassen sich diese also äquivalent als solche charakterisieren, bei denen das zugehörige Polynom $T^3 - sT^2 + \sigma T - p$ drei nichtnegative reelle Nullstellen besitzt.
Sollen wir nun eine symmetrische Ungleichung für alle $x, y, z \geq 0$ beweisen, so ist dies also äquivalent dazu, die entsprechende Ungleichung in s, σ, p für alle $(s, \sigma, p) \in \mathcal{P}$ zu beweisen. Dies hat nun den folgenden riesigen Vorteil: Wir können zwei der Variablen s, σ, p festhalten und untersuchen, wie sich der Ausdruck verhält, wenn wir die dritte verschieben. Zumindest in manchen Fällen lässt sich dies dann leicht charakterisieren:

Satz (uvw): Sind zwei der Variablen s, σ, p konstant, so wird die dritte nur dann maximal oder minimal mit der Eigenschaft $(s, \sigma, p) \in \mathcal{P}$, wenn das zugehörige Polynom eine doppelte Nullstelle oder eine Nullstelle bei $T = 0$ besitzt, d.h. wenn für das ursprüngliche Tripel (x, y, z) eine der Variablen Null oder zwei Variablen gleich sind.

Beweis: Wir zeigen zunächst den Fall, in dem s und σ konstant ist. Verschieben von p bedeutet dann einfach, den Graphen des Polynoms $T^3 - sT^2 + \sigma T - p$ vertikal zu verschieben. Hat dieser zunächst drei nichtnegative reelle Nullstellen, so bleibt dies auch der Fall, bis eine der Nullstellen zu $T = 0$ wandert oder zwei Nullstellen aufeinander zu laufen, was zu zeigen war. In den anderen Fällen argumentiert man ähnlich, nur betrachtet man nun die Verschiebung der Graphen von $T^2 - sT + \sigma - \frac{p}{T}$ bzw. $T - s + \frac{\sigma}{T} - \frac{p}{T^2}$. $\square$

[1] Manchmal wird auch die Normierung $x+y+z = 3u, xy+y+zx = 3v^2$ und $xyz = w^3$ verwendet, diese hat allerdings u.a. den Nachteil, dass v^2 auch negativ sein kann. (Was sind ihre Vorteile?)

Als erste Anwendung beweisen wir die Schur-Ungleichung aus dem ersten Kapitel:

Aufgabe (Schur-Ungleichung): Gegeben seien nichtnegative reelle Zahlen x, y, z. Zeige:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2.$$

Lösung: Die Ungleichung ist äquivalent zu $s^3 - 4s\sigma + 9p \geq 0$. Diese ist linear in p, also genügt es sie zu beweisen, wenn p minimal oder maximal wird, also wenn zwei Variablen gleich oder eine gleich 0 ist.
Ist $z = 0$, so müssen wir $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ zeigen, was nach AM-GM folgt.
Ist $y = z$, so müssen wir $x^3 + xy^2 \geq 2x^2y$ zeigen, was nach AM-GM folgt. □

Wir sehen also, dass die Schur-Ungleichung die Gleichheitsfälle (x, x, x) und $(x, x, 0)$ besitzt. Reine Mittelungleichungen haben also auch hier von vorneherein keine Chance, aber mit der uvw-Methode ist die Lösung ganz kurz. Das gilt auch für die Bundesrunden-Aufgabe:

Aufgabe: Beweise für alle $x, y, z > 0$ die Ungleichung

$$\frac{x+y+z}{3} + \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \geq 5\sqrt[3]{\frac{xyz}{16}}.$$

Lösung: Die Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{s}{3} + \frac{3p}{\sigma} \geq 5\sqrt[3]{\frac{p}{16}}$. Dies ist linear in s, also genügt es, diese zu beweisen, wenn s minimal oder maximal wird, also wenn zwei Variablen gleich oder eine gleich 0 ist. Im zweiten Fall müssen wir nur $s \geq 0$ zeigen, was trivial ist. Es bleibt der Fall $x = y$, den man dann leicht wie in der anderen Lösung behandelt.

Oft kann man sich mit Tricks zumindest einen Teil der konkreten Rechnung sparen: Zum Beispiel ist jedes Polynom von Grad höchstens 5 automatisch (höchstens) linear in p, für solche Ungleichungen genügt es also immer, sie für $z = 0$ oder $y = z$ zu beweisen!

4.4 Aufgaben

Aufgabe 4.1: Gegeben seien reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_{10}$ mit $-1 \leq x_i \leq 1$ und $x_1 + \cdots + x_{10} = 0$. Bestimme den maximal möglichen Wert von $x_1^3 + \cdots + x_{10}^3$.
Zusatz: Warum ist das analoge Problem für 2022 Variablen einfacher?

Aufgabe 4.2: Gegeben seien positive reelle Zahlen x, y, z. Zeige:

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

Aufgabe 4.3: Beweise für alle positiven reellen Zahlen x, y, z die Ungleichung

$$x^3(y^2+z^2)^2 + y^3(z^2+x^2)^2 + z^3(x^2+y^2)^2 \geq xyz\left[xy(x+y)^2 + yz(y+z)^2 + zx(z+x)^2\right].$$

Aufgabe 4.4: Finde die größte positive reelle Zahl k mit der Eigenschaft, dass die Ungleichung

$$\frac{1}{kab + c^2} + \frac{1}{kbc + a^2} + \frac{1}{kca + b^2} \geq \frac{k+3}{a^2 + b^2 + c^2}$$

für alle positive reellen Zahlen a, b, c mit $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$ erfüllt ist.

Aufgabe 4.5: Bestimme alle natürlichen Zahlen n mit der folgenden Eigenschaft: Für alle positiven reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ mit $a_1^6 + \cdots + a_n^6 = n$ gilt

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 \leq a_1^5 + \cdots + a_n^5.$$